Przykładowe zadania na egzamin wstępny na studia stacjonarne II-go stopnia

na kierunku Matematyka

prowadzonym przez Wydział Matematyki Stosowanej AGH

1. Które ze zdań jest tautologią?
A. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
B. $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
C. $(p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
D. $(p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

2. Które ze zdań jest tautologią?
A. $\exists x\ (p(x) \wedge q(x)) \Leftarrow \exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$
B. $\forall x\ (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow \forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)$
C. $\forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftarrow (\forall x\ p(x) \Rightarrow \forall x\ q(x))$
D. $\exists x\ (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow (\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists x\ q(x))$

3. Tautologią jest zdanie:
A. $\forall x\, p(x,x) \Rightarrow \forall x\, \forall y\, p(x,y)$
B. $\exists x\, \exists y\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, p(x,x)$
C. $\exists x\, \forall y\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, p(x,x)$
D. $\forall x\, \exists y\, p(x,y) \Rightarrow \forall x\, p(x,x)$

4. Niech D będzie dowolnym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$. Wówczas zdanie „Zbiór D jest pusty albo ma przynajmniej dwa elementy” można zapisać w postaci równoważnej jako:
A. $\forall x \in D\, \forall y \in D\ x \neq y$
B. $\forall x \in D\, \exists y \in \mathbb{R}\ x \neq y$
C. $(\forall x \in \mathbb{R}\ x \notin D) \vee (\exists x, y \in \mathbb{R}\ (x \in D \wedge y \in D))$
D. $\sim [\exists x \in \mathbb{R}\ x \in D \wedge \forall x, y \in \mathbb{R}\ (x \in D \wedge y \in D \Rightarrow x = y)]$

5. Rozważmy następujące funkcje zdaniowe określone na $\mathbb{R}$: $a(x) : \sqrt{(x-1)^2} \leq 0$; $b(x) : \sqrt{|x-1|^2} \geq 0$; $c(x) : |x-1| > 0$. Która z implikacji jest prawdziwa dla każdego x?
A. $a(x) \Rightarrow b(x)$
B. $b(x) \Rightarrow c(x)$
C. $c(x) \Rightarrow a(x)$
D. $b(x) \Rightarrow a(x)$

6. Przykładem zbiorów X i Y takich, że $Y \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ jest:
A. $X = \{a\}, Y = \{\{a\}\}$
B. $X = \{a\}, Y = \{a\}$
C. $X = \{a\}, Y = \{\{\emptyset\}\}$
D. $X = \emptyset, Y = \{\{\emptyset\}\}$

7. Niech A będzie gęstym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$, ale różnym od $\mathbb{R}$. Weźmy ciąg liczb dodatnich $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, który jest zbieżny do zera. Wówczas zbiór $\bigcup_{a\in A} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a, a+b_n]$ jest równy:
A. $\emptyset$
B. A
C. $\mathbb{R} \setminus A$
D. $\mathbb{R}$

8. Niech $I = \{2, 3, 5, 7\}$ oraz $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją zadaną warunkiem $xRy \Leftrightarrow \exists p \in I\ (p|x \Leftrightarrow p|y)$. Wówczas prawdziwe jest zdanie:
A. $135\, R\, 154$
B. R jest relacją spójną
C. $\exists x, y, z \in \mathbb{N}\ (xRy \wedge yRz \wedge \sim xRz)$
D. R jest relacją równoważności

9. Dla której z relacji zbiór ilorazowyX/R jest przeliczalny?
A. X-zbiór prostych na płaszczyźnie, $mRk \Leftrightarrow m \| k$
B. X-zbiór trójkątów na płaszczyźnie, $T_1RT_2 \Leftrightarrow T_1 \equiv T_2$ (są przystające)

C. X-zbiór rzeczywistych macierzy kwadratowych stopnia n, $ARB \Leftrightarrow \det A = \det B$
D. X-zbiór skończonych ciągów o wyrazach 0 lub 1 $(a_n)R(b_n) \Leftrightarrow$ w ciągu (a_n) jest tyle samo jedynek co w ciągu (b_n)

10. Jeżeli $A \sim B$ i $C \sim D$, ($\sim$ oznacza relację równoliczności zbiorów), to:
A. $A^C \sim B^D$
B. $A \cup C \sim B \cup D$
C. $A \setminus C \sim B \setminus D$
D. $A \cap C \sim B \cap D$

11. Niech f będzie funkcją parzystą i okresową o okresie T w $\mathbb{R}$, a g funkcją różnowartościową, nieparzystą i ograniczoną w $\mathbb{R}$. Wtedy funkcja $g \circ f$ jest:
A. parzysta, różnowartościowa i może być nieograniczona w $\mathbb{R}$
B. nieparzysta, okresowa o okresie mniejszym od T i ograniczona w $\mathbb{R}$
C. parzysta, okresowa o okresie T i ograniczona w $\mathbb{R}$
D. nieparzysta, różnowartościowa i może być nieograniczona w $\mathbb{R}$

12. Niech f będzie funkcją malejącą, różnowartościową i ograniczoną w $\mathbb{R}$, a g funkcją malejącą i ciągłą w $\mathbb{R}$. Wtedy funkcja $g \circ f$ jest:
A. malejąca, ciągła i ograniczona w $\mathbb{R}$
B. rosnąca, różnowartościowa i ograniczona w $\mathbb{R}$
C. rosnąca, ciągła i nie musi być różnowartościowa w $\mathbb{R}$
D. malejąca, różnowartościowa i nie musi być ciągła w $\mathbb{R}$

13. Niech $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to W$. Jeżeli $h \circ g \circ f$ jest suriekcją, to:
A: $h \circ g$ oraz h są suriekcjami
B: h oraz g są suriekcjami
C: $g \circ f$ oraz f są suriekcjami
D: f, g oraz h są suriekcjami

14. Jeżeli $f : X \to Y$ i $g : X \to X$ oraz $f \circ g = f$, to:
A. jeżeli f-suriekcja, to g-suriekcja
B. $g = \mathrm{id}_X$
C. jeżeli g-iniekcja, to f-iniekcja
D. jeżeli f-iniekcja, to g-iniekcja

15. Które ze zdań nie jest prawdziwe?
A. Jeśli istnieje iniekcja ze zbioru A w zbiór B, to istnieje suriekcja z B na A
B. Jeśli istnieje iniekcja ze zbioru A w zbiór B, to istnieje iniekcja z B w A
C. Jeśli istnieje suriekcja ze zbioru A na zbiór B, to istnieje iniekcja z B w A
D. Jeśli istnieje bijekcja ze zbioru A na zbiór B, to istnieje bijekcja z B w A

16. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określona wzorem $f(x, y) = (x - [y], y - [x])$, gdzie $[x]$ jest częścią całkowitą z x. Wtedy prawdą jest, że:
A. f jest suriekcją
B. f jest iniekcją
C. $f^{-1}[\{0\} \times \{0\}] = \mathbb{Z}^2$
D. $f^{-1}[\{0\} \times \{0\}] = \{(k, k) : k \in \mathbb{Z}\}$

17. Zdanie równoważne zaprzeczeniu zdania $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ ma postać:
A. p
B. $p \wedge \sim q$
C. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$
D. $\sim p \wedge q$

18. Zdanie równoważne zdaniu $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$ ma postać:
A. $p \vee \sim q$
B. $p \wedge \sim q$
C. $\sim p \vee \sim q$
D. $\sim p \wedge \sim q$

19. Jeżeli $v(\alpha \Rightarrow \beta) = 1$ i $v(\beta \Rightarrow \gamma) = 1$ i $v(\alpha \Rightarrow \gamma) = 1$, to:
A. $\exists\, x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}\ v(x) = 0$
B. $\exists\, x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}\ v(x) = 1$
C. $\forall\, x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}\ v(x) = 0 \vee \forall\, x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}\ v(x) = 1$
D. $\exists\, x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}\ v(x) = 0 \vee \forall\, x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}\ v(x) = 1$

20. Które ze zdań jest prawdziwe?
A. $(A \cup B) \setminus B = A$
B. $(A \setminus B) \cup B = A$
C. $(A \cup B) \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
D. $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B = \emptyset$

21. Jeśli $A \setminus B \subset B \setminus A$, to który z warunków nie zachodzi:
A. $A \subset B$
B. $B \subset A$
C. $A \setminus B = \emptyset$
D. $A \cup B \subset B$

22. W zbiorze wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych definiujemy relację równoważności warunkiem $pRq \Leftrightarrow p - q$ ma pierwiastek $x = 0$. Wówczas wielomian $p(x) = x^3 + 4x + 1$:
A. jest w tej samej klasie abstrakcji co $q(x) = x^2 + x - 1$
B. jest w relacji wyłącznie z wielomianami o stopniach nieparzystych
C. ma nieprzeliczalną klasę abstrakcji
D. nie należy do klasy abstrakcji żadnego wielomianu stałego

23. Która z rodzin nie jest podziałem zbioru $\mathbb{Q}^2$?
A. $A_t = \left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 + y^2 = t^2\right\}$ dla $t \in \mathbb{Q}$
B. $A_t = \left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x \cdot y = t\right\}$ dla $t \in \mathbb{Q}$
C. $A_t = \left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : y - x^2 = t\right\}$ dla $t \in \mathbb{Q}$
D. $A_t = \left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : y^2 + x = t\right\}$ dla $t \in \mathbb{Q}$

24. Jeżeli R jest relacją równoważności określoną na niepustym zbiorze X, to:
A. $\forall a, b \in X\ ([a]_R \subset [b]_R \wedge [a]_R \neq [b]_R \Rightarrow [a]_R = [b]_R)$
B. $\forall a \in X \exists b \in X\ (a \neq b \wedge b \in [a]_R)$
C. $\exists b \in X\ (b \in X \setminus \bigcup_{a \in X} [a]_R)$
D. $\forall a \in X \exists b \in X\ (b \in [a]_R \wedge [a]_R \neq [b]_R)$

25. W zbiorze częściowo uporządkowanym element minimalny:
A. nie może być jednocześnie elementem maksymalnym
B. jest elementem najmniejszym
C. nie może być elementem największym
D. nie jest porównywalny z żadnym innym elementem minimalnym

26. Niech X będzie niepustym zbiorem liniowo uporządkowanym. Które ze zdań jest fałszywe?
A. każdy niepusty podzbiór zbioru X jest łańcuchem
B. dowolne dwa elementy zbioru X są porównywalne
C. każdy skończony podzbiór zbioru X jest dobrze uporządkowany
D. każdy niepusty podzbiór zbioru X posiada elementy najmniejszy i największy

27. Który z podzbiorów zbioru $\mathbb{Q}$ jest dobrze uporządkowany relacją $\leq$?
A. $\left\{x - \frac{1}{y} : x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$
B. $\left\{x + \frac{1}{y} : x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$
C. $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$
D. $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$

28. Niech $\preccurlyeq$ będzie relacją częściowego porządku określoną na zbiorze $\mathbb{N}^2$ zadaną wzorem $(x, y) \preccurlyeq (a, b) \Leftrightarrow a | x \wedge y \leq b$. Kresem dolnym zbioru $A = \{2, 3, 4\}^2$ jest:
A. $(12, 4)$
B. $(12, 2)$

C. $(1, 2)$
D. $(1, 4)$

29. Jeżeli $A \sim B$ i $C \neq \emptyset$, ($\sim$ oznacza relację równoliczności zbiorów), to:
A. $A^C \sim B^C$
B. $A \cup C \sim B \cup C$
C. $A \setminus C \sim B \setminus C$
D. $A \cap C \sim B \cap C$

30. Twierdzenie $A \setminus B \sim B \setminus A \Rightarrow A \sim B$, ($\sim$ oznacza relację równoliczności zbiorów), prawdziwe jest:
A. tylko dla zbiorów skończonych
B. tylko dla zbiorów nieskończonych
C. tylko dla zbiorów pustych
D. dla wszystkich zbiorów

31. Dla której z relacji zbiór ilorazowyX/R nie jest przeliczalny?
A. $X = \mathbb{Z}$, $mRk \Leftrightarrow 3|(m-k)$
B. X-zbiór figur na płaszczyźnie, $F_1 R F_2 \Leftrightarrow F_1 \sim F_2$ (są podobne)
C. X=$\mathbb{R}[x]$, $wRv \Leftrightarrow \deg w = \deg v$
D. $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $fRg \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : f(n) = 0\} \sim \{n \in \mathbb{N} : g(n) = 0\}$ ($\sim$ oznacza relację równoliczności zbiorów)

32. Niech $A \sim B$ ($\sim$ oznacza relację równoliczności zbiorów). Który z warunków nie zachodzi?
A. $A^B \sim B^A$
B. $A^A \sim B^B$
C. $A \setminus B \sim B \setminus A$
D. $A \times B \sim B \times A$

33. Niech $f : X \to Y$. Który z poniższych warunków nie jest równoważny surjektywności funkcji f?
A. $\forall B \subset Y \; f[f^{-1}[B]] = B$
B. $\forall B \subset Y \wedge B \neq \emptyset \; f^{-1}[B] \neq \emptyset$
C. $\bigcup\limits_{A \subset X} f[A] = Y$
D. $\forall y_1, y_2 \in Y \; (y_1 \neq y_2 \Rightarrow f^{-1}[\{y_1\}] \cap f^{-1}[\{y_2\}] = \emptyset)$

34. Niech $f, g : X \to X$ oraz $f \circ g = g \circ f = id_X$. Wtedy:
A. $f^{-1} = g^{-1}$
B. $f = id_X$ i $g = id_X$
C. $(f^{-1})^{-1} = g$
D. $f^{-1} = g$

35. Jeżeli $v\,(p \vee \sim q \Rightarrow r) = 1$ i $v\,(q \vee \sim r \Rightarrow p) = 1$ i $v\,(r \vee \sim p \Rightarrow q) = 1$, to prawdziwe jest zdanie:
A. $\forall\, x, y \in \{p, q, r\}\; [v\,(x) = v(y) = 1 \Rightarrow x = y]$
B. $\exists\, x, y \in \{p, q, r\}\; [v\,(x) = 1 \wedge v(y) = 0]$
C. $\forall\, x, y \in \{p, q, r\}\; [x \neq y \Rightarrow v\,(x) \neq v(y)]$
D. $\forall\, x, y \in \{p, q, r\}\; [x \neq y \Rightarrow v\,(x) = 0 \vee v\,(y) = 1]$

36. Granica ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $a_n = n\left(\sqrt{1 + \sin\frac{1}{n}} - 1\right)$:
A. nie istnieje
B. jest równa $+\infty$
C. jest równa $\frac{1}{2}$
D. jest równa 0

37. Granica $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3^x - 2}{3^x + 1}\right)^{2^x + 3^{x+1} + 1}$ jest równa:
A. 0
B. $+\infty$
C. $\frac{1}{e^9}$
D. $\frac{1}{e^3}$

38. Granica $\lim_{x \to -1^+} \frac{1-e}{1-e^{x+1}}$ jest równa:
A. $+\infty$

B. $-\infty$
C. 0
D. 1

39. Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+11}{7^n} x^{2n}$ jest:
A. $[-\sqrt{7}, \sqrt{7})$
B. $(-7, 7)$
C. $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$
D. $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$

40. Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(3 - \frac{1}{n^2}\right)$:
A. jest rozbieżny
B. jest bezwzględnie zbieżny
C. jest warunkowo zbieżny
D. ma sumę równą 3

41. Rozwinięciem funkcji $x \mapsto x^3(\sin x - x)$ w szereg Maclaurina jest:
A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+4}$
B. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+4}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+3}$
D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+3}$

42. Która z funkcji F nie jest pierwotną funkcji $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$?
A. $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$
B. $F(x) = \sin(\arccos x)$
C. $F(x) = -\int_0^x \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$
D. $F(x) = -\cos(\arcsin x)$

43. Dana jest funkcja $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$. Pochodna $f'(0)$:
A. nie istnieje
B. jest równa 1
C. jest równa 0
D. jest równa -1

44. Funkcja $f : x \mapsto \ln(2 + \frac{1}{x})$:
A. jest wypukła w $(-\frac{1}{4}, 0)$
B. jest wypukła w $(0, \infty)$
C. posiada punkt przegięcia
D. jest wklęsła w $(0, \infty)$

45. Funkcja $f : x \mapsto \ln 3x + \frac{1}{\ln 2x}$:
A. jest malejąca w $(0, \frac{1}{2e})$
B. jest malejąca w $(\frac{e}{2}, \infty)$
C. posiada maksimum lokalne i minimum lokalne
D. jest rosnąca w $(\frac{1}{2}, \infty)$.

46. Pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach $y = \ln 5x$, $y = 0$, $x = \frac{e^2}{5}$ jest równe:
A. $\frac{e^2+1}{5}$
B. $\frac{e^2-1}{5}$
C. $\frac{e^2+5}{5}$
D. 1

47. Całka $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$:
A. jest rozbieżna do $+\infty$
B. jest zbieżna do 0
C. jest zbieżna do π

D. nie jest zbieżna.

48. Granica podwójna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+x^3}{x^2+y^2}$:
A. jest równa 0
B. nie istnieje
C. jest równa $+\infty$
D. jest równa 1

49. Funkcja $u : (x, y) \mapsto 2xy - \frac{1}{x}\cos^2 y + 7y + C$, $x > 0, y \in \mathbb{R}$ jest potencjałem pola wektorowego:
A. $\vec{F}(x, y) = \left(2x - \ln x \cdot \cos^2 y, 2x - \frac{2\cos y}{x} + 7\right)$
B. $\vec{F}(x, y) = \left(2x + \frac{\cos^2 y}{x^2}, 2x - \frac{\sin 2y}{x} + 7\right)$
C. $\vec{F}(x, y) = \left(2y + \frac{\cos^2 y}{x^2}, 2x + \frac{\sin 2y}{x} + 7\right)$
D. $\vec{F}(x, y) = \left(2y + \frac{\sin^2 y}{x^2}, 2x + \frac{\sin 2y}{x} + 7\right)$

50. Całka $\int_0^2 dx \int_x^2 \sqrt[4]{4 - y^2}dy$ jest równa:
A. $\frac{8\sqrt{2}}{5}$
B. 0
C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$
D. 1

51. Objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$ dana jest wzorem:
A. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r^3 dr$
B. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr$
C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} dr \int_0^{r^2} dz$
D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^3 \cos\varphi dr$

52. Niech Γ będzie odcinkiem łączącym punkty $(0, -1)$ oraz $(3, 0)$. Całka krzywoliniowa nieskierowana $\int_\Gamma \frac{dl}{y-x}$ jest równa:
A. $-\sqrt{10}\ln 3$
B. $-\frac{3}{2}\ln 3$
C. $\frac{\sqrt{10}}{2}\ln 3$
D. $-\frac{\sqrt{10}}{2}\ln 3$

53. Niech Γ to krzywa będąca brzegiem obszaru $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, zorientowana ujemnie względem swego wnętrza. Całka $\oint_\Gamma (y - 2x^2 + 3)dx + (x + 2y^2 + 1)dy$ jest równa:
A. 0
B. 8π
C. 4π
D. -8π

54. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

X	-	zbiór wszystkich szeregów liczbowych
A	-	zbiór szeregów rozbieżnych
B	-	zbiór szeregów zbieżnych
C	-	zbiór szeregów bezwzględnie zbieżnych
D	-	zbiór szeregów warunkowo zbieżnych

Które z poniższych stwierdzeń jest fałszywe?
A. $B \setminus C \neq \varnothing$
B. $A \cup C \cup D = X$
C. $C \cap D = \varnothing$
D. $D \subset C$

55. Granica ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $a_n = (1 + \ln(n + 2) - \ln n)^n$ wynosi:
A. 1
B. $+\infty$
C. e

D. e^2

56. Granica ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $a_n = \sqrt{2(1+3+9+\ldots+3^{n-1})} - \sqrt{3}^n$ wynosi:
A. 1
B. $+\infty$
C. 0
D. $-\infty$

57. Dziedziną funkcji $f : x \to \ln\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arcctg}(x+5)\right) + \frac{1}{x - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2))}$ jest zbiór:
A. $(-4,-2) \cup (-2,+\infty)$
B. $(-4,+\infty)$
C. $(\infty,-4)$
D. $(\infty,-4]$

58. Funkcja $f : x \mapsto \operatorname{arctg}(\log(x^2 - x - 1))$ w przedziale $[-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$:
A. osiąga wartość najmniejszą i osiąga wartość największą
B. osiąga wartość najmniejszą i nie osiąga wartości największej
C. osiąga wartość największą i nie osiąga wartości najmniejszej
D. nie osiąga wartości największej i nie osiąga wartości najmniejszej

59. Granica $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2} + \ln x\right)$ wynosi:
A. $+\infty$
B. $-\infty$
C. $\frac{1}{2}$
D. 0

60. Granica $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\sin x}{e^x+\cos x}$:
A. nie istnieje
B. jest równa 0
C. jest równa 1
D. jest równa -1

61. Objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót wokół osi Ox krzywej o równaniu $y = \frac{2}{\sqrt{x \ln^2 x}}$ dla $x \in (0, \frac{1}{e^2}]$ wynosi:
A. $\frac{\pi}{2}$
B. π
C. 1
D. 2π

62. Niech Γ będzie dowolną krzywą zamkniętą bez samoprzecięć, kawałkami gładką. Całka $\oint_\Gamma yzdx + zxdy + xydz$ jest równa:
A. 0
B. 1
C. -1
D. $\frac{1}{2}$

63. Niech Σ będzie zewnętrzną stroną powierzchni ostrosłupa o wierzchołkach $(0,0,0), (2,0,0), (0,1,0), (0,0,2)$. Całka $\int_\Sigma 2ydzdx + 3zdxdy$ jest równa:
A. $\frac{10}{3}$
B. $-\frac{10}{3}$
C. 10
D. -10

64. Które z poniższych wnioskowań jest poprawne?
A. Jeśli funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są nieciągłe w punkcie $x = 1$, to funkcja $f + g$ jest nieciągła w punkcie $x = 1$.
B. Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ograniczona na przedziale $[0,1]$, to f osiąga minimum lokalne oraz maksimum lokalne w przedziale $[0,1]$.
C. Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $\mathbb{R}$, to funkcja f' jest ciągła w $\mathbb{R}$.
D. Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest malejąca, zaś funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ osiąga w punkcie x_0 minimum lokalne, to

funkcja $f \circ g$ osiąga w punkcie x_0 maksimum lokalne.

65. Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Który z poniższych szeregów jest rozbieżny?
A. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$
B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+a_n}$
D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$

66. Ciąg funkcyjny $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $f_n : x \mapsto nxe^{-nx^2}$:
A. jest zbieżny punktowo ale nie jednostajnie w $\mathbb{R}$ do funkcji $f : x \mapsto 0$
B. jest zbieżny jednostajnie w $\mathbb{R}$ do funkcji $f : x \mapsto 0$
C. jest zbieżny punktowo w $\mathbb{R}$ do funkcji nieciągłej
D. jest zbieżny punktowo w $\mathbb{R}$ do funkcji $f : x \mapsto x$

67. Granica $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$:
A. jest równa $\frac{1}{2}$
B. nie istnieje
C. jest równa 0
D. jest równa $+\infty$

68. Całka $\int e^{\sqrt{x}} dx$ jest równa:
A. $e^{\sqrt{x}} + C$, $C \in \mathbb{R}$
B. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + C$, $C \in \mathbb{R}$
C. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$, $C \in \mathbb{R}$
D. $2e^x(x - 1) + C$, $C \in \mathbb{R}$

69. Pochodna kierunkowa funkcji $f : (x, y) \mapsto \sqrt[3]{x^3 + 3y^3}$ w kierunku wersora dwusiecznej pierwszej ćwiartki układu współrzędnych w punkcie $P = (0, 0)$:
A. jest równa $\sqrt[6]{2}$
B. nie istnieje
C. jest równa $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
D. jest równa 0

70. Funkcja $f : (x, y) \mapsto (3x^2 + 2y)\sqrt{e^y}$:
A. osiąga w punkcie $(0, -2)$ minimum lokalne
B. osiąga w punkcie $(0, -2)$ maksimum lokalne
C. nie posiada ekstremów lokalnych
D. ma zarówno minimum lokalne jak i maksimum lokalne

71. Pierwsza pochodna funkcji uwikłanych $x \mapsto y(x)$ określonych równaniem $y = 2 + 3y^x$ dana jest wzorem:
A. $y' = 0$
B. $y' = 3xy^{x-1}$
C. $y' = 1 - 3xy^{x-1}$
D. $y' = \frac{3y^x \ln y}{1-3xy^{x-1}}$

72. Niech Γ będzie krzywą zamkniętą powstałą w wyniku przecięcia powierzchni o równaniach $x+y+z-2 = 0$, $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, skierowaną tak, że jej rzut na płaszczyznę Oxy jest skierowany dodatnio względem swego wnętrza. Całka $\oint_\Gamma xdx - dz$ jest równa:
A. 0
B. $-\frac{3}{2}$
C. $\frac{3}{2}$
D. $-\frac{3}{4}$

73. O zbieżności szeregu $\sum_{n-1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ rozstrzyga:
A. kryterium Cauchy'ego
B. kryterium d'Alemberta
C. kryterium porównawcze
D. kryterium Leibniza

74. Która z poniższych implikacji jest fałszywa?
A. $(\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \wedge \ \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0) \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} b_n = a$
B. $(\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \wedge \ \forall n \in \mathbb{N}\, |b_n - b| < a_n) \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = b$
C. $(\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq b_n \ \wedge \ \exists \lim_{n\to\infty} a_n = a \ \wedge \ \exists \lim_{n\to\infty} b_n = b) \ \Rightarrow \ a \leq b$
D. $\left(a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \ \wedge \ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \ \wedge \ \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\right) \ \Rightarrow \ (a_n - b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

75. O szeregu liczbowym $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{e} - 1)$ można powiedzieć, że:
A. jest zbieżny
B. jest rozbieżny
C. ma sumę równą 1
D. nie zachodzi warunek konieczny zbieżności szeregu

76. Granica $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{123} \cdot n!\right)$:
A. nie istnieje
B. jest równa -1
C. jest równa 0
D. jest równa 1

77. Granica ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $a_1 = 3$ oraz $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n}$ dla $n \geq 1$:
A. jest równa 0
B. jest równa 3
C. nie istnieje
D. jest równa $\frac{1}{2}$

78. Dana jest funkcja $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x + y + \frac{x^3y+x^2}{x^4+y^2} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Pochodna $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$:
A. jest niewłaściwa i wynosi $+\infty$
B. jest niewłaściwa i wynosi $-\infty$
C. nie istnieje
D. wynosi 1

79. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Które z poniższych stwierdzeń jest fałszywe?
A. Przekształcenie f jest globalnie odwracalne.
B. Jakobian przekształcenia f w punkcie $(2, 1)$ jest równy 1.
C. Przekształcenie f jest lokalnie odwracalne w otoczeniu punktu $(2, 1)$.
D. Macierz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego przekształcenia f^{-1} w punkcie $(3, 2)$.

80. Całka $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 ye^{x^3} dx$ jest równa:
A. $\frac{2}{3}(e - 1)$
B. 1
C. 0
D. $\frac{2}{3}$

81. Zbiorem punktów skupienia ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $a_n = 5^n \mathrm{tg}\frac{n\pi}{3}$ jest zbiór:
A. $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$
B. $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
C. $\{-\infty, 0, +\infty\}$
D. $\{-\infty, +\infty\}$

82. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = (2|x| - x^2)\ln|x| + \frac{3}{2}x^2 - 4|x|$.
A. W przedziale $(0, 1)$ funkcja f jest rosnąca.
B. W przedziale $(-1, e)$ funkcja f jest malejąca.
C. Funkcja f posiada cztery ekstrema lokalne.
D. Funkcja f osiąga w punkcie $x = 1$ maksimum lokalne.

83. Granica $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int\limits_0^x \sin(\sin(t^2))dt$:
A. jest równa $+\infty$
B. jest równa 0

C. nie istnieje
D. jest równa $\frac{1}{3}$

84. Dany jest szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1})$. Które z poniższych stwierdzeń jest poprawne?
A. Szereg jest zbieżny do $\sqrt{2}-1$
B. Szereg jest rozbieżny
C. Nie zachodzi warunek konieczny zbieżności szeregu
D. Szereg jest zbieżny do 0

85. Rozwinięciem funkcji $x \mapsto \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ w szereg Maclaurina jest:
A. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$
B. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$
C. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)\cdot(2n+1)!}$
D. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$

86. Jednym z pierwiastków wielomianu $w(z) = z^4 - (2+3i)^4$ jest liczba:
A. $2-3i$
B. $-3+2i$
C. $-3-2i$
D. $-2+3i$

87. Każdy wielomian nieparzystego stopnia n o współczynnikach rzeczywistych:
A. ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty
B. ma nieparzystą liczbę pierwiastków zespolonych nierzeczywistych (licząc z krotnościami)
C. ma parzystą liczbę pierwiastków zespolonych nierzeczywistych (licząc z krotnościami)
D. ma parzystą liczbę pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami)

88. Równanie $|z-1-2i| = |1+2i|$ przedstawia na płaszczyźnie zespolonej:
A. okrąg
B. koło
C. prostą
D. punkt $(0,0)$

89. Niech $w \circ z := w + z + iwz$ dla dowolnych liczb $w, z \in \mathbb{C}$, gdzie i to jednostka urojona. Wówczas:
A. $(\mathbb{C}, \circ)$ jest grupą abelową
B. $(\mathbb{R}, \circ)$ jest grupą abelową
C. $(\mathbb{C} \setminus \{i\}, \circ)$ jest grupą abelową
D. $(\mathbb{R} \setminus \{i\}, \circ)$ jest grupą abelową

90. Podgrupą grupy $(\mathbb{Z}, +)$ jest:
A. zbiór liczb naturalnych z dodawaniem
B. zbiór liczb parzystych dodatnich z dodawaniem
C. zbiór liczb całkowitych ujemnych z dodawaniem
D. zbiór liczb parzystych z dodawaniem

91. Pierścieniem całkowitym nie jest zbiór:
A. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
B. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
C. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
D. $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, +, \cdot)$

92. Niech G będzie grupą cykliczną rzędu n. Wówczas:
A. wszystkie elementy tej grupy są rzędu n
B. każdy element w G ma rząd będący dzielnikiem liczby n
C. G ma dokładnie jeden element rzędu n

D. G nie posiada elementu rzędu n

93. Odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem $L(x, y) = (x + y, x + y, x + y)$:
A. jest monomorfizmem
B. jest epimorfizmem
C. ma rząd równy 2
D. ma jądro o wymiarze 1

94. Niech $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym, którego macierz w bazach kanonicznych ma postać $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$. Wtedy następujące zdanie jest prawdziwe:
A. L jest endomorfizmem diagonalizowalnym
B. $\dim \ker L = 1$
C. L nie jest iniekcją
D. $\dim \mathrm{im} L = 1$

95. Niech A i B będą macierzami tego samego endomorfizmu $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Wówczas:
A. A i B mają ten sam ślad i rząd, ale inne wyznaczniki
B. A i B są wzajemnie do siebie odwrotne
C. A i B mają ten sam wyznacznik, ślad i rząd
D. jedna z nich jest osobliwa, a druga nieosobliwa

96. Jądrem odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ danego wzorem $(L(p))(x) = x^2 p'(x)$ jest zbiór:
A. jednoelementowy
B. wielomianów stałych
C. wielomianów generowanych przez wielomian $2x^2 + x$
D. wielomianów stopnia 2

97. Wymiar jądra odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$, gdzie $f(w) = (w'(1), w''(0), w(2))$ dla $w \in \mathbb{R}_2[x]$, jest równy:
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

98. Wszystkie możliwe wartości wyznaczników kwadratowych macierzy rzeczywistych A spełniających równanie $A^2 + A^{-1} = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{0}$ jest macierzą zerową, to
A. 1
B. -1
C. 1 lub -1
D. 0 lub 1

99. Macierz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, jest diagonalizowalna dla:
A. każdego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
B. każdego $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
C. $a = 3$
D. $a = 0$

100. Jednorodny rzeczywisty układ równań liniowych posiadający niezerowe rozwiązanie:
A. jest układem oznaczonym
B. jest układem nieoznaczonym
C. posiada dokładnie dwa rozwiązania
D. może już nie mieć innych rozwiązań

101. Rząd kwadratowej macierzy diagonalizowalnej stopnia n jest zawsze równy:
A. liczbie n
B. liczbie różnych wartości własnych tej macierzy
C. liczbie niezerowych wartości własnych tej macierzy (licząc z krotnościami)

D. liczbie różnych niezerowych wartości własnych tej macierzy

102. Jeśli $B = \{u, v, w\}$ jest bazą w $\mathbb{R}^3$ oraz $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ jest monomorfizmem, to:
A. zbiór {f(u), f(v), f(w)} jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych w $\mathbb{R}^4$
B. zbiór {f(u), f(v), f(w)} jest zbiorem wektorów liniowo zależnych w $\mathbb{R}^4$
C. zbiór {f(u), f(v), f(w)} jest bazą w $\mathbb{R}^4$
D. zbiór B jest również bazą jądra odwzorowania f

103. Jeśli $B = \{u, v, w\}$ jest bazą w $\mathbb{R}^3$, to bazą w tej przestrzeni jest również zbiór:
A. $B_1 = \{u - 2v + w, 3u + w, u + 4v - w\}$
B. $B_2 = \{u + w, 2u + v, 3u - v + 4w\}$
C. $B_3 = \{u + w, v + w, 2u + v + 3w\}$
D. $B_4 = \{u - w, u + v + w, -u - 2v - 3w\}$

104. Proste o równaniach

$$l_1 : \begin{cases} x &= -3 + 2t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= -3 \end{cases}, \quad l_2 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-3}$$

A. pokrywają się
B. przecinają się w jednym punkcie
C. są skośne
D. są prostopadłe

105. Wektorem równoległym do prostej

$$l : \begin{cases} 5x - 2y + z &= -1 \\ -3x + y - z &= 2 \end{cases}$$

jest wektor o współrzędnych:
A. $[1, 2, 1]$
B. $[-1, 2, 1]$
C. $[2, -4, -2]$
D. $[2, 4, -2]$

106. Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$:
A. jest diagonalizowalna
B. ma ślad równy 4
C. jest nieosobliwa
D. jest niediagonalizowalna

107. Forma kwadratowa $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taka, że $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3$, jest generowana przez formę dwuliniową $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o przepisie:
A. $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_2y_3$
B. $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3$
C. $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_3y_2$
D. $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_2y_3 - x_3y_2$

108. Element odwrotny do 15 w pierścieniu $\mathbb{Z}_{59}$:
A. nie istnieje
B. to 4
C. to 44
D. to $\frac{1}{15}$

109. Dzielnikiem zera w pierścieniu $\mathbb{Z}_{66}$ nie jest:
A. 6
B. 33
C. 22
D. 5

110. Niech P będzie dowolnym punktem przecięcia prostej o równaniu $x - y + 1 = 0$ z elipsą o równaniu $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Suma odległości punktu P od ognisk tej elipsy jest równa:
A. 6
B. 8
C. 10
D. 12

111. Niech $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \oplus)$ będzie grupą, gdzie działanie $\oplus$ określone jest następująco

$$(a, b) \oplus (c, d) = ((a + c) \bmod 2, (b + d) \bmod 2)$$

Zaznacz zdanie prawdziwe.
A. G jest izomorficzna z grupą Kleina (grupa izometrii własnych prostokąta z działaniem złożenia).
B. G jest izomorficzna z $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.
C. Każdy element w G jest rzędu 2.
D. W G istnieje dokładnie jeden element rzędu 2.

112. Niech G będzie grupą rzędu 4.
A. W G istnieje element rzędu 2.
B. W G istnieje element rzędu 3.
C. G jest grupą cykliczną.
D. G jest grupą nieprzemienną.

113. $23^{480} \bmod (17 \cdot 31)$ wynosi:
A. 1
B. 23
C. 17
D. 31

114. Jedynym rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} x \equiv 10 \bmod 11 \\ x \equiv 8 \bmod 19 \end{cases}$$

w zbiorze $\mathbb{Z}_{209}$ jest:
A. 65
B. 10
C. 8
D. 18

115. W pierścieniu Dedekinda $\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}i\right] = \left\{a + b\sqrt{5}i : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ element 2 jest:
A. elementem nierozkładalnym, który nie jest elementem pierwszym
B. elementem rozkładalnym, który nie jest elementem pierwszym
C. elementem nierozkładalnym, który jest elementem pierwszym
D. elementem rozkładalnym, który jest elementem pierwszym

116. Forma kwadratowa $g(x, y, z) = -3x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z^2$ jest:
A. określona dodatnio
B. określona ujemnie
C. półokreślona dodatnio
D. nieokreślona.

117. Baza ortonormalna otrzymana metodą ortogonalizacji Gramma-Schmita z bazy $((1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0))$ względem standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^3$ to:
A. $((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0))$
B. $((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (0, 1, 0))$
C. $((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), (0, 1, 0))$
D. $((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0))$

118. Rozważamy macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ oraz iloczyn skalarny $\circ$ w przestrzeni macierzy $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ zdefiniowany następująco: $A \circ B = \mathrm{tr}(AB^T)$. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

A. $A \perp B$
B. $A \circ B = -1$
C. $\angle(A, B) = \frac{\pi}{4}$
D. $\angle(A, B) = \pi$

119. Które z poniższych odwzorowań jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?
A. $A \circ B = \det A + \det B$
B. $A \circ B = \mathrm{tr}(AB^T)$
C. $A \circ B = \det(AB)$
D. $A \circ B = \mathrm{tr}(AB)$

120. Forma kwadratowa $g(x, y, z)$ generowana przez formę dwuliniową $f(u, v) = 2u_1v_1 + 6u_2v_2 + 2u_3v_3 + 2u_1v_3 - 3u_3v_1$ ma wzór:
A. $g(x, y, z) = 2x^2 + 6y^2 + 2z^2 - xz$
B. $g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 - \frac{1}{2}xz$
C. $g(x, y, z) = 2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + xz$
D. $g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + \frac{1}{2}xz$

121. Problem brzegowy

$$\begin{cases} x'' - x = 0 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

A. nie ma rozwiązania
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie
C. ma dokładnie dwa rozwiązania
D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

122. Problem początkowy

$$\begin{cases} x' = \mathrm{sgn}(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

A. nie ma rozwiązania
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie
C. ma dokładnie dwa rozwiązania
D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

123. Układ równań

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

A. jest asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa
B. jest stabilny i nie jest asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa
C. nie jest stabilny w sensie Lapunowa
D. jest asymptotycznie stabilny i nie jest stabilny w sensie Lapunowa

124. Rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1$$

A. jest przedłużalne na $\mathbb{R}$
B. nie jest przedłużalne $\mathbb{R}$
C. jest określone na przedziale $(-\infty, 1]$
D. jest określone na przedziale $[0, \infty)$

125. Jeśli funkcja $x(t)$ jest rozwiązaniem problemu początkowego

$$x' = tx + 1, \quad x(0) = 1,$$

to:
A. $x'(0) = 0$
B. $x'(0) = -1$
C. $x''(0) = 0$
D. $x'''(0) = 2$

126. Rozwiązanie ogólne równania

$$x' = \frac{tx + x^2}{t^2}$$

jest postaci:
A. $x = \frac{-1}{\ln|t|+C}$
B. $x = \frac{1}{\ln|t|+C}$
C. $x = \frac{-t}{\ln|t|+C}$
D. $x = \frac{t}{\ln|t|-C}$

127. Równanie

$$x' = x^2 + t$$

jest równaniem:
A. Bernoulliego
B. Clairauta
C. Riccatiego
D. Lagrange'a

128. Dla równania

$$x''' - x'' = 0$$

następujące funkcje tworzą układ fundamentalny:
A. $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = e^t$
B. $x_1 = 1$, $x_2 = t$, $x_3 = te^t$
C. $x_1 = 1$, $x_2 = t$, $x_3 = e^{-t}$
D. $x_1 = 1$, $x_2 = t$, $x_3 = e^t$

129. Równanie

$$x' = x + t$$

A. jest równaniem o zmiennych rozdzielonych
B. ma wszystkie rozwiązania przedłużalne na $\mathbb{R}$
C. ma całkę ogólną postaci $x = Ce^{-t} - t - 1$
D. ma niezerowe rozwiązanie ograniczone

130. Rozwiązanie ogólne równania

$$x'' + 2x' + 2x = 1$$

jest postaci:
A. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}$
B. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + \frac{1}{2}$
C. $x = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t + \frac{1}{2}$
D. $x = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t + 1$

131. Układem fundamentalnym e^{At} układu równań

$$x' = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

jest macierz postaci:
A.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{5t}) & -e^t + e^{5t} \\ \frac{1}{4}(-e^t + e^{5t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{5t}) \end{bmatrix}$$

B.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{5t}) & \frac{1}{4}(-e^t + e^{5t}) \\ -e^t + e^{5t} & \frac{1}{2}(e^t + e^{5t}) \end{bmatrix}$$

C.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{5t}) & 2e^t + 2e^{5t} \\ \frac{1}{4}(-e^t + e^{5t}) & -e^t + e^{5t} \end{bmatrix}$$

D.

$$\begin{bmatrix} e^t + e^{5t} & -e^t + e^{5t} \\ -e^t + e^{5t} & e^t + e^{5t} \end{bmatrix}$$

132. Równanie

$$x'' = x^2 + (x')^2$$

można przez podstawienie $y(x) = x'(t)$ sprowadzić do równania:
A. $y' = x^2 + y^2$
B. $y' + y = x^2 + y^2$
C. $y'y = x^2 + y^2$
D. $\frac{y'}{y} = x^2 + y^2$

133. Czynnikiem całkującym równania

$$(3tx + t^2)dt + (3tx + x^2)dx = 0$$

jest funkcja:
A. $\frac{1}{t}$
B. $\frac{1}{x}$
C. $\frac{1}{(t+x)^3}$
D. $\frac{1}{t+x}$

134. W metodzie uzmienniania stałych rozwiązanie szczególne równania

$$x'' + x = t$$

jest postaci:
A. $x = C_1(t)e^t \cos t + C_2(t)e^t \sin t$
B. $x = C_1(t)e^t \cos t + C_2(t)e^{-t} \sin t$
C. $x = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}$
D. $x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t$

135. Punkt krytyczny układu równań

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

to:
A. siodło
B. węzeł
C. ognisko
D. środek

136. Problem brzegowy

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases}$$

A. nie ma rozwiązania
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie
C. ma dokładnie dwa rozwiązania
D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

137. Problem początkowy

$$\begin{cases} x' = 3x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

A. nie ma rozwiązania
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = 0$
C. ma dokładnie dwa rozwiązania: $x_1 = 0$, $x_2 = t^3$
D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

138. Układ równań

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

A. jest asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa
B. jest stabilny i nie jest asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa

C. nie jest stabilny w sensie Lapunowa
D. jest asymptotycznie stabilny i nie jest stabilny w sensie Lapunowa

139. Równanie

$$x' = \cos(x^2 + t^2)$$

A. ma wszystkie rozwiązania przedłużalne na $\mathbb{R}$
B. ma przedłużalne na $\mathbb{R}$ tylko rozwiązania dodatnie
C. nie ma rozwiązań przedłużalnych na $\mathbb{R}$
D. ma rozwiązania przedłużalne na $\mathbb{R}$ i ma rozwiązania nieprzedłużalne na $\mathbb{R}$

140. Wielomian

$$w(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 4)^2$$

jest wielomianem charakterystycznym pewnego równania różniczkowego zwyczajnego liniowego jednorodnego o stałych współczynnikach. Układ fundamentalny tego równania to zbiór złożony z funkcji:
A. $x_1 = e^t$, $x_2 = te^t$, $x_3 = t^2e^t$, $x_4 = \cos t$, $x_5 = \sin t$, $x_6 = t\cos t$, $x_7 = t\sin t$
B. $x_1 = 1$, $x_2 = e^t$, $x_3 = te^t$, $x_4 = \cos 2t$, $x_5 = \sin 2t$, $x_6 = t\cos 2t$, $x_7 = t\sin 2t$
C. $x_1 = e^t$, $x_2 = te^t$, $x_3 = t^2e^t$, $x_4 = \cos 2t$, $x_5 = \sin 2t$, $x_6 = t\cos 2t$, $x_7 = t\sin 2t$
D. $x_1 = 1$, $x_2 = t$, $x_3 = t^2$, $x_4 = \cos 2t$, $x_5 = \sin 2t$, $x_6 = t\cos 2t$, $x_7 = t\sin 2t$

141. Rozwiązanie ogólne równania

$$x' = (x + t + 1)^2$$

jest postaci:
A. $\operatorname{arctg}(x + t + 1) = Ct$
B. $\operatorname{arctg} x = t + 1 + C$
C. $x = \operatorname{tg}(t + C) - t - 1$
D. $x = \operatorname{tg}(t + C) + t + 1$

142. Obwiednią pewnej rodziny krzywych całkowych równania

$$x = tx' - (x')^2$$

jest krzywa:
A. $x = t - 1$
B. $x = -\frac{1}{4}t^2$
C. $x = \frac{1}{4}t^2$
D. $x = t + 1$

143. Dla równania

$$t^2x'' - 2tx' + 2x = 0, \ \ t > 0$$

następujące funkcje tworzą układ fundamentalny:
A. $x_1 = e^t$, $x_2 = e^{-t}$
B. $x_1 = t^2$, $x_2 = 4t^2$
C. $x_1 = t$, $x_2 = t^2$
D. $x_1 = t^2$, $x_2 = t^3$

144. Każde ciągłe rozwiązanie nierówności

$$x(t) \leq 2 + \int_0^t x(s)\, ds, \quad t \geq 0$$

jest oszacowane od góry przez funkcję:
A. $x = e^{2t}$
B. $x = 2e^t$
C. $x = e^t$
D. $x = t^2$

145. Rozwiązanie ogólne równania

$$t^2x'' - 4tx' + 6x = 2t^4, \ \ t > 0$$

jest postaci:
A. $x = C_1t^2 + C_2t^3 + t$

B. $x = C_1t^2 + C_2t^3 + t^3$
C. $x = C_1t^2 + C_2t^4 + t^3$
D. $x = C_1t^2 + C_2t^3 + t^4$

146. Układem fundamentalnym e^{At} układu równań

$$x' = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

jest macierz postaci:
A.

$$\begin{bmatrix} (1+2t)e^{3t} & 4te^{3t} \\ -te^{3t} & (1-2t)e^{3t} \end{bmatrix}$$

B.

$$\begin{bmatrix} (1-2t)e^{3t} & 4te^{3t} \\ -te^{3t} & (1+2t)e^{3t} \end{bmatrix}$$

C.

$$\begin{bmatrix} (1-2t)e^{3t} & -te^{3t} \\ 4te^{3t} & (1+2t)e^{3t} \end{bmatrix}$$

D.

$$\begin{bmatrix} (1+2t)e^{3t} & -te^{3t} \\ 4te^{3t} & (1-2t)e^{3t} \end{bmatrix}$$

147. Rozwiązanie $x = 0$ równania

$$x'' = x - x^3$$

A. jest stabilne w sensie Lapunowa
B. jest asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa
C. nie jest stabilne w sensie Lapunowa
D. jest stabilne i nie jest asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa

148. Równanie

$$(t + x^2)dt + (x + t^2)dx = 0$$

ma czynnik całkujący postaci $\mu(w)$, gdzie:
A. $w = t$
B. $w = x$
C. $w = tx$
D. $w = t + x$

149. W metodzie przewidywania rozwiązanie szczególne równania

$$x''' - x'' = e^t$$

przewidujemy w postaci:
A. $x = Ae^t$
B. $x = Ate^t$
C. $x = At^2e^t$
D. $x = At^3e^t$

150. Punkt krytyczny układu równań

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$$

to:
A. siodło
B. węzeł
C. środek
D. ognisko

151. Problem początkowy

$$\begin{cases} x' = 2t(x-1) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

A. nie ma rozwiązania
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie
C. ma dokładnie dwa rozwiązania
D. ma nieprzeliczalnie wiele rozwiązań

152. Równanie

$$x'' = a^2 x,$$

gdzie $a = const \in \mathbb{R}$, ma niezerowe rozwiązania zmierzające do zera, gdy $t \to +\infty$ dla:
A. $a = 0$
B. $a \neq 0$
C. tylko $a > 0$
D. tylko $a < 0$

153. Zbiór rozwiązań równania

$$x''' + x'' + x' + x = 0$$

z działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$:
A. nieskończenie wymiarową
B. jednowymiarową
C. dwuwymiarową
D. trójwymiarową

154. Zbiór funkcji $\{e^t, te^t\}$ jest układem fundamentalnym równania:
A. $x'' - 2x' + x = 0$
B. $x'' + 2x' + x = 0$
C. $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$
D. $x''' - 2x'' + x' = 0$

155. Rozwiązanie stacjonarne $(x, y) = (0, 0)$ układu równań

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 + y \\ y' = x^2 - y^2 + x \end{cases}$$

A. jest stabilne w sensie Lapunowa
B. jest asymptotycznie stabilne i nie jest stabilne w sensie Lapunowa
C. nie jest stabilne w sensie Lapunowa
D. jest stabilne i nie jest asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa

156. Rzucono jednocześnie trzema nierozróżnialnymi monetami. Wszystkich możliwych wyników jest:
A. 4
B. 3
C. 2
D. 8

157. Na ile sposobów czterech pasażerów może wsiąść do pociągu, jeśli każdy wybiera losowy wagon spośród pięciu?
A. 625
B. 5
C. 24
D. 120

158. Ile jest ciągów binarnych o 5 jedynkach i 95 zerach?
A. $\binom{100}{5}$
B. $\binom{99}{4}$
C. 2^{100}
D. 2^{95}

159. Liczba wszystkich ciągów 5–elementowych o wyrazach ze zbioru 10-elementowego jest równa:
A. 10^5
B. $\frac{10!}{5!}$
C. $\binom{10}{5}$
D. $5!$

160. Miara probabilistyczna mierzalnego zbioru jednoelementowego:
A. jest większa lub równa zero
B. może być nieskończona
C. nie istnieje
D. jest zawsze dodatnia

161. Z urny, w której znajduje się 5 kul białych i 4 kule czarne, losujemy bez zwracania dwie kule. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że obie wylosowane kule będą białe wynosi:
A. $\frac{5}{18}$
B. $\frac{5}{9}$
C. $\frac{4}{5}$
D. 0

162. Rzucamy cztery razy sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo dokładnie dwukrotnego otrzymania jedynki wynosi:
A. $\frac{25}{216}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{8}{108}$

163. Rzucono 5 razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo wypadnięcia orła co najwyżej raz jest równe:
A. $6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$
B. $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5$
C. $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$
D. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

164. Zmienna losowa X ma rozkład $P(X = -1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}, P(X = 1) = \frac{1}{4}$. Wówczas:
A. $E\left(X^2\right) > \mathrm{E}(X)$
B. $E\left(X^2\right) < \mathrm{E}(X)$
C. $E\left(X^2\right) = \mathrm{E}(X)$
D. $E\left(X^2\right) = (\mathrm{E}(X))^2$

165. Zmienna losowa X ma rozkład $P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 3) = P(X = 4) = \frac{1}{4}$. Wariancja zmiennej losowej X jest równa:
A. $\frac{5}{2}$
B. 0
C. 1
D. 2

166. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem λ. Wtedy:
A. $P(X = \frac{1}{4}t) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\left(\frac{1}{4}t\right)}}{\left(\frac{1}{4}t\right)!}$, dla $t \in \{4k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$
B. $P(X = \frac{1}{4}t) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(4t)}}{(4t)!}$, dla $t \in \{4k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$
C. $P(X = \frac{1}{4}t) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(4t)}}{(4t)!}$, dla $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
D.$P(X = 4t) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(4t)}}{t!}$, dla $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

167. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem 2. Wtedy:
A. $P(X = k) = \frac{e^{-2}2^k}{k!}$, dla $k = 0, 1, 2, \ldots$
B. $P(X = k) = \frac{e^{-2}2^k}{k!}$, dla $k = 1, 2, 3 \ldots$
C. $P(X = k) = \frac{-2}{k!} \cdot e^k$, dla $k = 0, 1, 2, \ldots$
D. $P(X = k) = \frac{-2}{k!} \cdot e^k$, dla $k = 1, 2, 3 \ldots$

168. Funkcja

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x & , \quad |x|<1\\ 0 & , \quad x\le -1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$

jest dystrybuantą pewnej ciągłej zmiennej losowej. Funkcja gęstości g jest określona wzorem:
A. $g(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ dla $x\in(-1,1)$ oraz $g(x)=0$ dla $x\notin(-1,1)$
B. $g(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ dla $x\in\mathbb{R}$
C. $g(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1+x^2}}$ dla $x\in\mathbb{R}$
D. $g(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ dla $x\in\mathbb{R}$

169. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$g(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x\le 0\end{cases}$$

Dystrybuantą tej zmiennej losowej jest funkcja:
A. $F(x)=1-e^{-x^2}$ dla $x>0$ oraz $F(x)=0$ dla $x\le 0$
B. $F(x)=\int\limits_0^x g(t)\,dt$ dla $x\in\mathbb{R}$
C. $F(x)=\int\limits_x^\infty g(t)\,dt$ dla $x\in\mathbb{R}$
D. $F(x)=1-e^{-x^2}$ dla $x\in\mathbb{R}$

170. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$g(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x\le 0\end{cases}$$

Wówczas $P(1\le X\le 2)$ jest równe:
A. $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^4}$
B. $\frac{1}{e^4}-\frac{1}{e}$
C. $\frac{1}{e}$
D. $\frac{1}{e^4}$

171. Niech $(\Omega,\mathcal{F},P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Jeżeli dla zdarzeń A, B, C zachodzi $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{4}$, to:
A. $P(A\cup B\cup C)=1$
B. $A\cap B\cap C=\emptyset$
C. $P(A\cup B\cup C)\ge\frac{1}{2}$
D. $P(A\cup B\cup C)>\frac{1}{2}$

172. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $(-1,1)$. Rozkładem zmiennej losowej $Y=\mathrm{sgn}(X)$ (sgn jest funkcją znaku) jest:
A. $P(Y=-1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$
B. $P(Y=-1)=P(Y=0)=P(Y=1)=\frac{1}{3}$
C. $P(Y=-1)=\frac{1}{3}$, $P(Y=1)=\frac{2}{3}$
D. rozkład ciągły

173. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x)=4x^3e^{-x^4}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Wówczas $P(0\le X\le 1)$ jest równe:
A. $\frac{e-1}{e}$
B. $\frac{1}{e}$
C. $\frac{e^2-1}{e^2}$
D. $\frac{1}{e^2}$

174. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x)=4x^3e^{-x^4}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Wówczas $P\big(X>2\big|X>1\big)$ jest równe:
A. e^{-15}
B. e^{-1}
C. e^{-3}
D. 0

175. Zmienna losowa X ma następujący rozkład: $P(X = 1) = \frac{1}{3}$, $P(X = -1) = \frac{2}{3}$. Wartość oczekiwana zmiennej X wynosi:
A. $-\frac{1}{3}$
B. 1
C. 2
D. $\frac{1}{3}$

176. Zmienna losowa X ma następujący rozkład: $P(X = 1) = 0,3$, $P(X = -1) = 0,7$. Zmienna losowa Y ma rozkład jednostajny na przedziale $(-1, 1)$. Zmienne X i Y są niezależne. Kowariancja zmiennych X i Y wynosi:
A. 0
B. 1
C. -1
D. $0,7$

177. Zmienna losowa X ma rozkład: $P(X = -\frac{\pi}{3}) = P(X = \frac{\pi}{6}) = P(X = \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$. Niech $Y = \cos^2 X$. Wartość oczekiwana zmiennej losowej Y jest równa:
A. $\frac{5}{12}$
B. $\frac{1}{4}$
C. $-\frac{3}{4}$
D. 0

178. X jest zmienną losową o rozkładzie: $P(X = -\frac{\pi}{3}) = P(X = 0) = P(X = \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$. Wariancja zmiennej losowej $Y = \cos X$ jest równa:
A. $\frac{1}{18}$
B. 1
C. $\frac{1}{3}$
D. 0

179. Wiadomo, że zmienna losowa N ma rozkład Poissona i że $P(N = 3) = P(N = 2)$. Prawdziwe jest stwierdzenie:
A. $E(N) = \frac{17}{9}$
B. $E(N) = 3$
C. $\mathrm{Var}(N) = 1$
D. $E(N^2) = 3$

180. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem 4. Wtedy:
A. $E(X) = 4$ i $\mathrm{Var(X)} = 4$
B. $E(X) = 2$ i $\mathrm{Var(X)} = 1$
C. $E(X) = 2$ i $\mathrm{Var(X)} = 2$
D. $E(X) = 2$ i $\mathrm{Var(X)} = 4$

181. Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego (dwumianowy) z parametrami 10000 i $\frac{1}{100}$. Wtedy:
A. $\mathrm{Var}(X) = 99$
B. $\mathrm{Var}(X) = 9$
C. $\mathrm{Var}(X) = 10$
D. $\mathrm{Var}(X) = 90$

182. Gęstość zmiennej losowej o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 1 oraz wariancją 2 dana jest wzorem:
A. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-1)^2}{4}}$
B. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-2)^2}{2}}$
C. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(x-1)^2}$
D. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-2(x-1)^2}$

183. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkład normalny, odchylenie standardowe zmiennej X wynosi $\frac{1}{2}$, a zmiennej Y jest równe 2. Odchylenie standardowe zmiennej losowej $Z = 2X + \frac{1}{2}Y$ jest równe:
A. $\sqrt{2}$
B. 2

C. 1
D. $2\sqrt{2}$

184. Odchylenie standardowe zmiennej losowej X wynosi 1, a odchylenie standardowe zmiennej losowej Y jest równe 2. Kowariancja między zmiennymi losowymi $X+Y$ i $X-Y$ jest równa:
A. -3
B. 5
C. 3
D. 0

185. Zmienne losowe X i Y są niezależne. Odchylenie standardowe zmiennej losowej X wynosi 1, a odchylenie standardowe zmiennej losowej Y jest równe 2. Współczynnik korelacji między zmiennymi losowymi $X+Y$ i $X-Y$ jest równy:
A. $-\frac{3}{5}$
B. -3
C. 0
D. $\frac{3}{5}$

186. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$. Kowariancja zmiennych losowych X^2 i X^3 jest równa:
A. $\frac{1}{12}$
B. $\frac{1}{24}$
C. $\frac{1}{6}$
D. $\frac{1}{3}$

187. $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Wartość oczekiwana zmiennej losowej $Z = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ jest równa:
A. $\frac{n}{n+1}$
B. 0
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{n+1}{n}$

188. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład jednostajny na kole jednostkowym o środku $(0,0)$. Wartość oczekiwana zmiennej losowej $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ jest równa:
A. $\frac{2}{3}$
B. $\frac{1}{\pi}$
C. 0
D. $-\frac{2}{3}$

189. Niech X będzie dowolnym zbiorem takim, że $a \in X$. Zbiór który nie jest σ-algebrą to:
A. $\{X\}$
B. $\{\emptyset, X\}$
C. $\{\emptyset, \{a\}, X \setminus \{a\}, X\}$
D. rodzina wszystkich podzbiorów zbioru X

190. Rzucamy kostką do gry, aż wypadnie szóstka. Rozkład P_X zmiennej losowej równej liczbie rzutów w takim doświadczeniu ma postać:
A. $P_X = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\delta_i$
B. $P_X = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{6})^i \delta_i$
C. $P_X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{i-1}\delta_i$
D. $P_X = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{i-1}\delta_i$

191. Dla jakiej wartości A funkcja $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ Axe^{-x}, & x > 0 \end{cases}$
jest gęstością zmiennej losowej?

A. $A = 0$
B. $A = 1$
C. $A = 2$
D. $A = -1$

192. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Jeżeli dla zdarzeń A i B zachodzi $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{5}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$, to:
A. $P(A) \le P(A') \le P(B)$
B. $P(A) \le P(B) \le P(A')$
C. $P(B) \le P(A) \le P(B')$
D. $P(B') \le P(B) \le P(A')$

193. Zmienna losowa X ma dystrybuantę F, która jest funkcją ciągłą. Wartość dystrybuanty zmiennej losowej $Y = -X$ w punkcie t to:
A. $F(-t)$
B. $1 - F(-t)$
C. $1 - F(t)$
D.$1 + F(-t)$

194. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych (X_n) o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Wtedy:
A. ciąg spełnia mocne prawo wielkich liczb i nie spełnia słabego prawa wielkich liczb
B. ciąg spełnia mocne prawo wielkich liczb i słabe prawo wielkich liczb
C. ciąg nie spełnia mocnego prawa wielkich liczb i spełnia słabe prawo wielkich liczb
D. ciąg nie spełnia mocnego prawa wielkich liczb i nie spełnia słabego prawa wielkich liczb

195. Wartość oczekiwana zmiennej losowej o gęstości $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$:
A. wynosi 1
B. wynosi 0
C. wynosi $\ln 2$
D. nie istnieje

196. Przeliczalny iloczyn zdarzeń pewnych:
A. może nie być zdarzeniem
B. ma dopełnienie o prawdopodobieństwie równym 1
C. ma prawdopodobieństwo równe 1
D. może mieć dowolne prawdopodobieństwo

197. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Bernoulliego (dwumianowym) z parametrami 100 i $\frac{1}{10}$. Niech Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Wtedy:
A. $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 100n}{3\sqrt{n}} < t\right) = \Phi(t)$
B. $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 100n}{9\sqrt{n}} < t\right) = \Phi(t)$
C. $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{3\sqrt{n}} < t\right) = \Phi(t)$
D. $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{9\sqrt{n}} < t\right) = \Phi(t)$

198. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie definiowanym przez dystrybuantę F. Wtedy dystrybuanta G zmiennej losowej $\min\{X, Y\}$ dana jest wzorem:
A. $G(x) = (F(x))^2$
B. $G(x) = 1 - (F(x))^2$
C. $G(x) = (1 - F(x))^2$
D. $G(x) = 1 - (1 - F(x))^2$

199. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie definiowanym przez dystrybuantę F. Wtedy dystrybuanta G zmiennej losowej $\max\{X, Y\}$ dana jest wzorem:
A. $G(x) = (F(x))^2$
B. $G(x) = 1 - (F(x))^2$
C. $G(x) = (1 - F(x))^2$

D. $G(x) = 1 - (1 - F(x))^2$

200. Dystrybuanta zmiennej losowej postaci $X = \max\{G, 0\}$ gdzie G ma standardowy rozkład normalny:
 A. jest funkcją ciągłą
 B. jest funkcją ściśle rosnącą
 C. ma skok w punkcie 0 o wielkości $\frac{1}{2}$
 D. nie istnieje

201. Rozważamy dwa rozkłady prawdopodobieństwa P_1 oraz P_2 zadane odpowiednio przez gęstości $p_1(x) = e^{-x} \cdot \mathbf{1}_{(\mathbf{0},\infty)}$oraz $p_2(x) = 2e^{-2x} \cdot \mathbf{1}_{(\mathbf{0},\infty)}$, gdzie $\mathbf{1}_A$ oznacza indykator zbioru A. Pochodna Radona-Nikodyma $\frac{dP_1}{dP_2}$:
 A. nie istnieje
 B. ma wersję $f(x) = \frac{1}{2}e^{x}$
 C. ma wersję $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$
 D. ma wersję $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \mathbf{1}_{(\mathbf{0},\infty)}$

202. Rozważamy dwa jednostajne rozkłady prawdopodobieństwa P_1 oraz P_2 odpowiednio $U(-1, 1)$ oraz $U(0, 1)$. Pochodna Radona-Nikodyma $\frac{dP_1}{dP_2}$:
 A. nie istnieje
 B. ma wersję $f(x) = 2 \cdot \mathbf{1}_{(-1,0)}$
 C. ma wersję $f(x) = 2 \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}$
 D. ma wersję $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}$

203. Niech wektor losowy (X, Y, Z) ma rozkład normalny o diagonalnej macierzy kowariancji. Wówczas zmienne losowe $X + Z$ oraz Y:
 A. są niezależne i nieskorelowane
 B. są niezależne i nie są nieskorelowane
 C. nie są niezależne i są nieskorelowane
 D. nie są niezależne i nie są nieskorelowane

204. Niech zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $U(0, 1)$. Wówczas:
 A. $Z =\ln X$ ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $EZ = 1$
 B. $Z =\ln X$ ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $EZ = -1$
 C. $Z = -\ln X$ ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $EZ = 1$
 D. $Z = -\ln X$ ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $EZ = -1$

205. Niech zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbf{1}_{(\mathbf{0},\infty)}$ $(\lambda > 0)$. Wówczas dla dowolnego $\lambda > 2$:
 A. $P(X > 4|X > 2) = 1$
 B. $P(X > 4|X > 2) = e^{-2}$
 C.$P(X > 4|X > 2) = P(X > 2)$
 D. $P(X > 4|X > 2) = P(X > 4)$

206. Niech $E \subset \mathbb{R}$ oraz $f, g : E \to \mathbb{R}$. Dane są odwzorowania

$$\rho(f, g) = \sup_{x\in E} |f(x) - g(x)|, \qquad d(f, g) = \max_{x\in E} |f(x) - g(x)|$$

 Wtedy:
 A. ρ i d są metrykami w zbiorze $X = C(E) = \{f : E \to \mathbb{R}; f - \text{ciągła}\}$
 B. ρ i d są metrykami w zbiorze $X = \{f : E \to \mathbb{R}; f - \text{ograniczona}\}$
 C. tylko d jest metryką w zbiorze $X = C(E) = \{f : E \to \mathbb{R}; f - \text{ciągła}\}$
 D. tylko ρ jest metryką w zbiorze $X = \{f : E \to \mathbb{R}; f - \text{ograniczona}\}$

207. Niech przestrzeń $\mathbb{R}$ będzie wyposażona w topologię naturalną τ oraz $A \subset \mathbb{R}$. Rozważmy topologię indukowaną τ_A w A przez τ oraz σ_A - rodzinę zbiorów domkniętych w przestrzeni (A, τ_A). Wtedy:
 A. $(5, 8] \notin \tau_A$, gdy $A = [-7, 2] \cup (5, 8]$
 B. $\underline{\mathrm{Int}\{4\}} = \emptyset$, gdy $A = \mathbb{N}$
 C.$\overline{(-1, 0]} = [-4, 0]$, gdy $A = [-4, 0]$
 D. $\left(0, \frac{1}{2}\right] \in \sigma_A$, gdy $A = (0, 1]$

208. Niech $X = \{-2, 0, 2, 4\}$. W zbiorze X zadana jest topologia

$$\tau = \{\emptyset, X, \{-2\}, \{0\}, \{-2, 0\}, \{0, 2, 4\}\}.$$

Rozważmy przekształcenie $f : X \to X$ dane wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = -2 \text{ lub } x = 2, \\ 2 & \text{dla } x = 4, \\ 4 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wtedy f jest:
A. ciągłe
B. ciągłe tylko w punktach $x = -2$ oraz $x = 4$
C. nieciągłe w punktach $x = 0$ oraz $x = 2$
D. nieciągłe w punkcie $x = 2$ oraz ciągłe w punkcie $x = 4$

209. Niech $(\mathbb{Z}, \tau)$ będzie przestrzenią topologiczną, gdzie

$$\tau = \{A_k = \{k, k+1, k+2, \dots\} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$$

Prawdziwe jest następujące zdanie:
A. $(\mathbb{Z}, \tau)$ jest przestrzenią Hausdorffa
B. $(\mathbb{Z}, \tau)$ jest przestrzenią T_0
C. $(\mathbb{Z}, \tau)$ jest przestrzenią T_1
D. żadne z pozostałych

210. Rozważmy przekształcenie $f : [0, 2] \to [0, 2]$ dane wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{dla } x \in [1, 2] \end{cases}$$

z topologią indukowaną przez topologię naturalną w zbiorze $[0, 2]$. Wtedy f:
A. jest tylko otwarte
B. jest tylko domknięte
C. jest jednocześnie otwarte i domknięte
D. nie jest ani otwarte ani domknięte

211. Niech (X, τ), gdzie $X \neq \emptyset$, będzie przestrzenią topologiczną. Przestrzeń (X, τ) jest zwarta, gdy:
A. X jest dowolnym zbiorem przeliczalnym z topologią dyskretną
B. X jest dowolnym zbiorem skończonym z topologią dyskretną
C. $X = [0, +\infty)$ z topologią indukowaną w $[0, +\infty)$ przez topologię naturalną
D. $X = \mathbb{R}$ z topologią naturalną.

212. Niech x_0 będzie ustalonym podzbiorem zbioru $X \neq \emptyset$. Rozważmy następujące topologie

$$\tau_1 = \{U \subset X : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}, \qquad \tau_2 = \{V \subset X : x_0 \notin V\} \cup \{X\}$$

oraz rodziny zbiorów

$$\mathcal{B}_1 = \{\{x, x_0\} : x \in X \setminus \{x_0\}\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{\{x\} : x \in X \setminus \{x_0\}\}.$$

Prawdziwe jest stwierdzenie:
A. $\mathcal{B}_1$ jest bazą τ_1 i $\mathcal{B}_2$ jest bazą τ_2 na X
B. $\mathcal{B}_1$ nie jest bazą τ_1 i $\mathcal{B}_2$ jest bazą τ_2 na X
C. $\mathcal{B}_1$ jest bazą τ_1 i $\mathcal{B}_2$ nie jest bazą τ_2 na X
D. $\mathcal{B}_1$ nie jest bazą τ_1 i $\mathcal{B}_2$ nie jest bazą τ_2 na X

213. Załóżmy, że w zbiorze $X = \{1, 2, 3, 4\}$ zadane są rodziny zbiorów

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}, \qquad \tau_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

Przez σ_2 oznaczamy rodzinę zbiorów domkniętych w przestrzeni (X, τ_2). Prawdą jest, że:
A. τ_1 nie jest topologią w zbiorze X
B. (X, τ_2) jest przestrzenią Hausdorffa
C. zbiór $\{2, 4\}$ jest zbiorem brzegowym w (X, τ_1)
D. $\sigma_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4\}\}$

214. W zbiorze $X \neq \emptyset$ określono następującą rodzinę τ zbiorów:

$$\tau = \{A \subset X : x \in A \Rightarrow -x \in A\}.$$

Prawdą jest, że:
A. τ jest topologią w zbiorze $X = (-5, 5]$
B. zbiór $B = [0, 2)$ jest brzegowy, gdy $X = \mathbb{R}$
C. w przestrzeni $(\mathbb{R}, \tau)$ każdy zbiór domknięty jest zbiorem otwartym
D. w przestrzeni $(\mathbb{Z}, \tau)$ zbiór $C = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ jest nigdziegęsty

215. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ określamy metrykę

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2|, & x \neq y \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Wtedy:
A. $K((0, 0), r)$, $r > 0$, jest zbiorem jednoelementowym
B. $K((2, 2), 1) \neq \overline{K}((2, 2), 1)$
C. $K((0, 0), r) = \overline{K}((0, 0), r)$, $r > 0$
D. $K((2, 2), 1)$, jest zbiorem jednoelementowym

216. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wskaż zdanie, które nie jest prawdziwe.
A. W przestrzeni metrycznej (X, d) każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.
B.W przestrzeni metrycznej (X, d) każdy ciąg stały od pewnego miejsca jest zbieżny.
C. Jeżeli ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do x w przestrzeni metrycznej (X, d), to każdy jego podciąg też jest zbieżny do x.
D. W przestrzeni metrycznej (X, d) każdy ciąg Cauchy'ego jest ciągiem zbieżnym.

217. Niech (X, τ_X), (Y, τ_Y) będą przestrzeniami topologicznymi oraz $f : X \to Y$. Wówczas odwzorowanie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy:
A. $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ dla każdego $A \subset X$
B. przeciwobraz każdego zbioru domkniętego w Y jest otwarty w X
C. przeciwobraz każdego zbioru otwartego w Y jest domknięty w X
D. $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ dla każdego $B \subset Y$

218. Niech (X, τ_X), (Y, τ_Y) będą przestrzeniami topologicznymi oraz $f : X \to Y$ jest bijekcją. Wówczas funkcja f jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy:
A. f jest odwzorowaniem otwartym
B. f jest odwzorowaniem domkniętym
C. f jest odwzorowaniem ciągłym
D. $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ dla każdego $A \subset X$

219. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Dla dowolnych podzbiorów $A, B \subset X$ zachodzi:
A. $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$
B. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
C. $\mathrm{Int}(A \cup B) \subset \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$
D. $\mathrm{Int}(\overline{A}) = A$

220. W przestrzeni $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{N}})$:
A. zbiór liczb wymiernych nie jest zbiorem typu F_σ
B. zbiór liczb niewymiernych nie jest zbiorem typu G_δ
C. przedział $[a, b)$, $a < b$, nie jest zbiorem typu G_δ
D. przedział $[a, b)$, $a < b$, jest zbiorem typu F_σ i typu G_δ

221. Niech $X = \mathbb{R} = Y$, $\tau_X = \{A \subset X : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$, τ_Y będzie topologią naturalną. Rozważmy przekształcenie $f : X \to Y$ dane wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Wtedy f:
A. nie jest ciągłe w żadnym punkcie

B. jest ciągłe w punktach 0 oraz -1
C. jest ciągłe tylko w punkcie 0
D. jest ciągłe tylko w punkcie -1

222. Niech $X = \{a, b, c, d, e\}$. Rozważmy rodziny τ_1, τ_2, τ_3 gdzie

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}\\ \tau_2 &= \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}\\ \tau_3 &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}\,.\end{aligned}$$

Prawdziwe jest stwierdzenie:
A. τ_3 i τ_2 są topologiami w zbiorze X
B. τ_1 jest topologią w zbiorze X
C. τ_2 jest topologią w zbiorze X
D. τ_3 jest topologią w zbiorze X

223. Niech X będzie dowolnym zbiorem nieskończonym oraz $x_0 \in X$. Bazą topologii

$$\{A \subset X : x_0 \notin A \lor A = X \setminus B, \text{ gdy } B \text{ jest skończonym podzbiorem } X\}$$

jest:
A. $\{X \setminus B, \text{ gdy } B \text{ jest skończonym podzbiorem } X\}$
B. $\{\{x\} : x \in X \land x \neq x_0\}$
C. $\{\{x\} : x \in X \land x \neq x_0\} \cup \{X \setminus B, \text{ gdy } B \text{ jest skończonym podzbiorem } X\}$
D. $\{\{x\} : x \in X \land x \neq x_0\} \cup \{X \setminus B, \text{ gdy } B \text{ jest nieskończonym podzbiorem } X\}$

224. Dana jest przestrzeń $X \neq \emptyset$ z topologią dyskretną. Prawdą jest, że:
A. przestrzeń topologiczna X spełnia drugi aksjomat przeliczalności
B. przestrzeń topologiczna X nie spełnia ani pierwszego ani drugiego aksjomatu przeliczalności
C. przestrzeń topologiczna X spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności
D. przestrzeń topologiczna X spełnia pierwszy i drugi aksjomat przeliczalności

225. W przestrzeni $X \neq \emptyset$ rozważamy metrykę dyskretną. Niech $K(x, r)$ oznacza kulę otwartą o środku $x \in X$ i promieniu $r > 0$, natomiast $\overline{K}(x, r)$ – kulę domkniętą. Wówczas:
A. $K(x, r)$ jest zbiorem jednoelementowym
B. $K(x, 1) = \overline{K}(x, 1)$
C. $K(x, 2) \neq \overline{K}(x, 2)$
D. $K(x, 1)$ jest zbiorem jednoelementowym