KOMUTATORY DYFEOMORFIZMÓW KLASY C^r

JACEK LECH

Celem pracy jest przedstawienie dowodów doskonałości pewnych grup dyfeomorfizmów o zwartych nośnikach dla przypadku rozmaitości z foliacją oraz rozmaitości z narożami. Kluczowe znaczenie odgrywa tutaj wykorzystanie modyfikacji metody Mathera-Epsteina.

Praca składa się z czterech rozdziałów. Pierwszy zawiera podstawowe pojęcia i własności wykorzystywane w rozważanym problemie. Przedstawiono fakty dotyczące modułów ciągłości oraz seminorm w przestrzeniach odwzorowań na zwykłej rozmaitości. Osobny podrozdział zawiera twierdzenia o pewnych własnościach topologicznych grup dyfeomorfizmów na $\mathbb{R}^n$.

W rozdziale drugim wprowadzone zostało pojęcie odwzorowań klasy $C^{r,s}$, a także zaprezentowano ich podstawowe własności. Umożliwiło to przeformułowanie przedstawionych wcześniej oszacowań seminorm na przypadek rozmaitości $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k)$, gdzie $\mathcal{F}_k = \{\mathbb{R}^k \times \{\mathrm{pt}\}\}$ oznacza foliację produktową.

Niech $(M, \mathcal{F})$ będzie rozmaitością z foliacją i niech $\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M, \mathcal{F})$ będzie grupą dyfeomorfizmów klasy $C^{r,s}$ na $(M, \mathcal{F})$ działających wzdłuż liści i dyfeotopijnych z Id przez $C^{r,s}$-dyfeotopie o zwartych nośnikach. W głównej części rozdziału drugiego przedstawiono dowód, że grupa $\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M, \mathcal{F})$ wyposażona w $C^{r,s}$-topologię Whitney'a jest grupą topologiczną. Ponadto udowodniona została własność fragmentacji dla rozmaitości z foliacją.

Rozdział trzeci opisuje dowód twierdzenia o doskonałości grupy $\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M, \mathcal{F})$ dla r skończonego, $r \neq n+1$, gdzie n jest wymiarem rozmaitości. Używając faktów opisanych wcześniej dowód zostaje sprowadzony do przypadku $M = \mathbb{R}^n$. Następnie przedstawiono główną część rozumowania. Składa się ona z kilku etapów, z których najważniejszymi są konstrukcja operatora zwijania i operatora Mathera. Zauważyć należy, że wszystkie użyte odwzorowania są zgodne ze strukturą foliacji. Przeprowadzona konstrukcja umożliwia użycie twierdzenia Schaudera-Tichonowa o punkcie stałym i w efekcie uzyskanie tezy twierdzenia.

Na końcu rozdziału trzeciego podane zostały uwagi dotyczące przypadku $r = n+1$. Problem ten jest nadal otwarty. W szczególności podany został związek doskonałości grup dyfeomorfizmów na rozmaitości z foliacją z doskonałością takiej grupy na zwykłej rozmaitości, gdzie przypadek $r = n+1$ również nie został rozwiązany.

Czwarty rozdział pracy jest poświęcony zagadnieniu doskonałości składowej spójnej identyczności grupy C^∞-dyfeomorfizmów o zwartych nośnikach na rozmaitości z narożami. W dowodzie przyjęto założenie, że rozmaitość nie ma wierzchołków.

Przypomniane zostały podstawowe definicje dotyczące rozmaitości z narożami i opisano własności potrzebne do dalszej części rozumowania. Następnie, opierając się na dowodzie Epsteina, przeprowadzono konstrukcję operatora Mathera. Operator ten może być użyty jedynie wzdłuż krawędzi rozmaitości. Stąd przedstawiona została dodatkowo inna metoda nazywana rozkładem regularnym.

Dowód głównego twierdzenia wykorzystuje oba rozwiązania. Podobnie jak wcześniej ważne jest odwołanie się do twierdzenia Schaudera-Tichonowa o punkcie stałym.

Ostatni podrozdział dotyczy przypadku rozmaitości z narożami, która ma wierzchołki. Podane zostały argumenty, że wówczas rozważana grupa nie jest doskonała.