ZADANIA NA EGZAMIN LICENCJACKI
(TRUDNE)

1. Prawdziwe jest zdanie:
A. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin(\arcsin x) = x$.
B. $\forall x \in [0, \pi]$: $\arcsin(\sin x) = x$.
C. $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = \pi - x$.
D. $\forall x \in [-1, 1]$: $\sin(\arccos x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

2. Wyrażenie $\cos(\arcsin \frac{1}{5})$ ma wartość równą
A. $0,5$.
B. $0,1$.
C. π.
D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

3. Wyrażenie $\arcsin(\sin \frac{63\pi}{5})$ ma wartość równą
A. $0,5$.
B. 0.
C. $\frac{63\pi}{5}$.
D. $\frac{2\pi}{5}$.

4. Równość $\mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x} + \mathrm{arctg}x = \frac{\pi}{4}$ jest prawdziwa dla
A. $x \in (-1, +\infty)$.
B. $x \in (-2, 1)$.
C. $x \in (-\infty, 0]$.
D. $x \in (-\infty, -1)$.

5. Przestrzeń metryczna jest zupełna, jeżeli
A. każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.
B. każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny do elementu tej przestrzeni.
C. każdy ciąg zbieżny ma granicę należącą do tej przestrzeni.
D. każdy ciąg jest zbieżny do elementu tej przestrzeni.

6. Granica ciągu (a_n), gdzie $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 1 + \sin n!}$ jest równa
A. 5.
B. 0.
C. $+\infty$.
D. 1.

7. Niech $a_n = \left[\frac{3n+1}{n+1}\right]$ $(n \in \mathbb{N})$, gdzie $[\cdot]$ oznacza cechę liczby. Wówczas
   A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$;
   B. ciąg (a_n) jest silnie rosnący.
   C. ciąg (a_n) jest silnie malejący.
   D. ciąg (a_n) jest stały.

8. Granica ciągu (a_n), gdzie $a_n = \sqrt[n]{5^n + 4^n - 3^n}$,
   A. nie istnieje.
   B. istnieje i jest mniejsza od granicy ciągu $b_n = \sqrt[n]{5^n + 4^n + 3^n}$.
   C. istnieje i jest równa granicy ciągu $c_n = \sqrt[n]{5^n - 4^n - 3^n}$.
   D. istnieje i jest większa od granicy ciągu $d_n = \sqrt[n]{5^n - 4^n + 3^n}$.

9. Granica ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{(-2)^n}{4^n+5^n} \sin(n^n + 2n!)$,
   A. jest równa $\frac{-1}{2}$.
   B. jest równa $\frac{1}{2}$.
   C. jest równa 0.
   D. nie istnieje.

10. Granica ciągu (a_n), gdzie $a_n = \left[\frac{3n+1}{n+1}\right]$, przy czym $[\cdot]$ oznacza cechę liczby, jest równa
    A. 2.
    B. 3.
    C. 1.
    D. 0.

11. Granica $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$
    A. jest równa 0.
    B. jest równa 1.
    C.jest równa $+\infty$.
    D. nie istnieje.

12. Granica $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$
    A. nie istnieje.
    B. jesr równa 1.
    C. jest równa 0.
    D. jest równa 2.

13. Przedziałem zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{4^n + n^4}(x-2)^n$ jest
   A. $(0, 4)$.
   B. $[0, 4]$.
   C. $(-4, 0)$.
   D. $[-4, 0)$.

14. Granica $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ jest równa
   A. ∞.
   B. $-\infty$.
   C. 3.
   D. 0.

15. Funkcja $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$
   A. nie ma asymptot.
   B. ma asymptotę pionową.
   C. ma asymptotę poziomą.
   D. ma asymptotę ukośną.

16. Założenia twierdzenia Lagrange'a spełnia funkcja
   A. $f : x \mapsto 1 - |x|$ na przedziale $[-1, 1]$.
   B. $f : x \mapsto \operatorname{ctg} x$ na przedziale $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
   C. $f : x \mapsto \operatorname{sgn} x$ na przedziale $[-1, 1]$.
   D. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ na przedziale $[0, 1]$.

17. Funkcja $f : x \mapsto \begin{cases} |x|(x+1), \ x \neq -1 \\ 1, \ x = 1 \end{cases}$
   spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a w przedziale
   A. $[-2, -\frac{1}{2}]$.
   B. $[-1, 1]$.
   C. $[0, 1]$.
   D. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

18. Niech $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą, a $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją malejącą. Wówczas
   A. funkcja $x \mapsto f_1(x) - f_2(-x)$ jest malejąca.
   B. funkcja $x \mapsto f_1(-x) - f_2(x)$ jest rosnąca.
   C. funkcja $x \mapsto f_1(-x) - f_2(-x)$ jest malejąca.
   D. funkcja $x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$ jest różnowartościowa.

19. Funkcja $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$
A. jest rosnąca w przedziale $(0, 1)$.
B. ma asymptotę pionową lewostronną.
C. nie ma asymptoty pionowej prawostronnej.
D. jest malejąca w przedziale $(2, 3)$.

20. Maksymalną dziedziną dla funkcji $f : \mathbb{R} \ni x \to \arcsin\frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}$ jest przedział
A. $[0, +\infty)$.
B. $[-1, 1]$.
C. $(-1, 1]$.
D. $(-1, 2]$.

21. Pochodna z rzeczywistej funkcji parzystej zawsze
A. istnieje.
B. też jest funkcją parzystą.
C. jest dodatnia.
D. jest funkcją nieparzystą, o ile istnieje.

22. Rzeczywista funkcja monotoniczna i ograniczona na pewnym zwartym przedziale
A. jest zawsze różniczkowalna.
B. jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.
C. jest zawsze ciągła na całym przedziale.
D. ma pochodną w każdym punkcie.

23. Rzeczywista funkcja monotoniczna i ograniczona na przedziale $[a, b)$
A. jest zawsze różniczkowalna.
B. jest funkcją parzystą.
C. jest zawsze ciągła na całym przedziale.
D. ma granice lewostronne we wszystkich punktach przedziału $(a, b]$.

24. Funkcja klasy $C^2(a, b)$, której pochodna jest funkcją rosnącą,
A. jest wypukła na (a, b) .
B. jest zawsze rosnąca na (a, b).
C. ma zawsze wartości nieujemne.
D. nie ma granicy prawostronnej w punkcie a.

25. Niech $f : \mathbb{R} \ni x \to (2x + 3, e^x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jaki przedział jest przeciwobrazem zbioru $[0, 1] \times [0, 1]$ przez funkcję f ?

A. $f^{-1}([0,1]\times[0,1])=[-\frac{3}{2},-1]$.
B. $f^{-1}([0,1]\times[0,1])=[1,\sqrt{2}]$.
C. $f^{-1}([0,1]\times[0,1])=[-1,0]$.
D. $f^{-1}([0,1]\times[0,1])=(-\infty,1]$.

26. Ciąg funkcyjny (f_n), gdzie $f_n : x \mapsto (1+\frac{1}{n})x$, $n \geq 1$, jest
A. punktowo zbieżny do funkcji $f : x \to x$ na całej osi rzeczywistej.
B. jednostajnie zbieżny do funkcji $f : x \to x$ na całej osi rzeczywistej.
C. punktowo zbieżny do $f : x \to 0$ na całej osi rzeczywistej.
D. jednostajnie zbieżny do funkcji $f : x \to 1+x$ na przedziale [0,1].

27. Ciąg funkcyjny (f_n), gdzie $f_n : x \mapsto \frac{2+\sin(nx^2)}{n^3+|x|}$, jest
A. zbieżny punktowo na $\mathbb{R}$ i nie jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$.
B. zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$ i nie jest zbieżny punktowo na $\mathbb{R}$.
C. jest rozbieżny do $+\infty$.
D. zbieżny punktowo i jednostajnie na $\mathbb{R}$.

28. Ciąg funkcyjny (f_n), gdzie $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}x+\sin(2x+\frac{x}{n})$, $n \geq 1$, jest
A. jednostajnie zbieżny do $f : x \to \sin 2x$ na przedziale $[-1,1]$.
B. jednostajnie zbieżny do $f : x \to \sin 2x$ na $\mathbb{R}$.
C. punktowo zbieżny do $f : x \to 0$ na $\mathbb{R}$.
D. jednostajnie zbieżny do $f : x \to 0$ na $[0,+\infty)$.

29. Niech $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i=1,2)$ będą funkcjami okresowymi o okresach podstawowych równych odpowiednio w_1 oraz w_2. Wówczas:
A. funkcja f_1+f_2 jest funkcją okresową.
B. funkcja f_1+f_2 jest okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy $w_1=w_2$.
C. dla dowolnej funkcji $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, złożenie $F \circ f_1$ jest funkcją okresową o okresie podstawowym w_1.
D. dla dowolnej iniekcji $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, złożenie $F \circ f_1$ jest funkcją okresową o okresie podstawowym w_1.

30. Funkcja $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & , x \leq 0 \\ \cos x & , x > 0 \end{cases}$
A. jest dwukrotnie różniczkowalna.
B. jest różniczkowalna, ale nie jest dwukrotnie różniczkowalna.
C. jest ciągła, ale nie jest różniczkowalna.
D. jest nieciągła.

31. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją klasy $C^2(\mathbb{R})$ taką, że w punkcie $x_0 = 0$ ma silne minimum lokalne, a w punkcie $x_1 = 1$ silne maksimum lokalne. Wówczas prawdą jest że:
A. Dla pewnego $c \in (0,1)$ zachodzi równość $f''(c) = 0$.
B. $f(0) < f(1)$.
C. $f''(1) < 0$.
D. Dla pewnego $c \in (0,1)$ zachodzi równość $f'(c) = 0$.

32. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją klasy $C^2(\mathbb{R})$ taką, że w punktach $x_0 = 0$ oraz $x_1 = 1$ istnieją silne maksima lokalne. Wówczas prawdą jest że:
A. nie istnieje $x_0 \in (0,1)$ takie że $f(x_0) > f(0)$ i $f(x_0) > f(1)$.
B. $f(0) = f(1)$.
C. $f''(1) > 0$.
D. dla pewnego $c \in (0,1)$ zachodzi równość $f'(c) = 0$.

33. Funkcja $x \mapsto 3x + 2\mathrm{arctg}\frac{x}{3}$
A. ma asymptotę pionową o równaniu $x = 3$.
B. ma dwie asymptoty poziome o równaniach $y = \pi$ oraz $y = -\pi$.
C. ma asymptotę ukośną o równaniu $y = 3x + \pi$.
D. ma dwie asymptoty ukośne o równaniach $y = 3x + 2\pi$ oraz $y = 3x - 2\pi$.

34. Funkcja $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
A. jest różniczkowalna.
B. jest ciągła w punkcie $x = 0$.
C. jest nieciągła w punkcie $x = 0$.
D. nie jest poprawnie określona w punkcie $x = 0$.

35. Nieskończona suma $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
A. jest rozwinięciem w szereg Taylora funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ w punkcie $x = 0$.
B. jest rozwinięciem w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ w punkcie $x = 1$.
C. jest rozwinięciem w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ w punkcie $x = -1$.
D. nie jest rozwinięciem w szereg Taylora funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ w punkcie $x = 0$.

36. Ekstremum funkcji $f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$ znajduje się w punktach:
A. $x = 0$.
B. $x = 0$ i $x = 2$.
C. $x = 2$.
D. funkcja nie posiada ekstremum.

37. Funkcja pierwotna funkcji $f : x \to \ln^2 x$
A. jest postaci $x \mapsto x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C$.
B. jest postaci $x \mapsto x\left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right) - C$.
C. nie istnieje.
D. nie jest funkcją elementarną.

38. Niech $l_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, $l_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, gdzie $\alpha > 1$. Prawdą jest, że
A. l_1 i l_2 są rozbieżne.
B. l_1 i l_2 są zbieżne.
C. l_1 jest zbieżna, a l_2 jest rozbieżna.
D. l_1 jest rozbieżna, a l_2 jest zbieżna.

39. Pole figury nieskończonej leżącej pod osią x zawartej pomiędzy krzywymi $y = \ln x$, $x = 0$, $y = 0$
A. nie istnieje.
B. istnieje i wynosi $\ln 2$.
C. istnieje i wynosi 1.
D. istnieje i wynosi $\ln \frac{1}{2}$.

40. Wiadomo, że $\displaystyle\int_0^1 x^{10}\, dx = \frac{1}{11}$. Niech $g = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{11}}(1^{11} + 2^{11} + \ldots + n^{11})$.
Prawdziwa jest relacja:
A. $g < \frac{1}{11}$.
B. $g = \frac{1}{11}$.
C. $g > \frac{1}{11}$.
D. $g = \left(\frac{1}{11}\right)^2$.

41. Niech $c = \displaystyle\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\, dx$. Uwzględniając nierówność $e^x > 1 + x,\ x \neq 0$, można wywnioskować, że
A. $c < \frac{3}{2}\pi$.
B. $c = \frac{3}{2}\pi$.

C. $c > \frac{3}{2}\pi$.
D. $c = 15$.

42. Całka nieoznaczona $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$ jest równa
A. $\ln \left|\frac{\sin x}{\sin^2 x - 1}\right| + C$.
B. $\ln |\operatorname{tg} x| + C$.
C. $\ln \left|\frac{\cos x}{1 - \cos x}\right| + C$.
D. $\ln |\operatorname{ctg} x| + C$.

43. Całka $\int\limits_5^{10} e^{-(x-5)^2} dx$ jest równa
A. 5.
B. $\int\limits_0^5 e^{-x^2} dx$.
C. $5 \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$.
D. 1.

44. Niech $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami pierwotnymi funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$
A. $F(x) = 0 \Leftrightarrow G(x) = 0$.
B. $F(x) - G(x)$ jest funkcją stałą.
C. $F'(x) = G(x)$.
D.$G'(x) = F(x)$.

45. Całka niewłaściwa $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$
A. nie jest zbieżna.
B. jest równa $+\infty$.
C. jest zbieżna do 0.
D. jest zbieżna do π.

46. Pole obszaru ograniczonego parabolami $y^2 = 2x$ oraz $x^2 = 2y$ jest równe
A. 2.
B. $\frac{4}{3}$.
C. 0.
D. 4.

47. Pole obszaru ograniczonego krzywymi $x^2+(y-2)^2 = 4$ i $y^2-4y+4x = 0$ jest równe
A. $2\pi - \frac{8}{3}$.
B. π.
C. $\pi + \frac{8}{3}$.
D. $\frac{8}{3}$.

48. Załóżmy, że całka $I = \int_0^\infty \int_0^x f(x,t)dtdx$ istnieje. Zmiana kolejności całkowania
A. nie jest w tym wypadku możliwa.
B. daje całkę $I = \int_0^\infty \int_t^\infty f(x,t)dxdt$.
C. daje całkę $I = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t)dxdt$.
D. daje całkę $I = \int_0^\infty \int_t^\infty f(t,x)dxdt$.

49. Granica $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{t}\, dt$
A. jest równa 0.
B. nie istnieje.
C. wynosi $+\infty$.
D. jest ujemna.

50. Granica $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{arctg} x)^x$ jest równa
A. 0.
B. $e^{\frac{1}{2}}$.
C. $-\infty$.
D. 1.

51. Granica funkcji $f : x \mapsto \left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$ w punkcie $x = 0$ jest równa
A. e.
B. e^2.
C. 1.
D. 0.

52. O pewnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiemy, że jest dwukrotnie rózniczkowalna. Ponadto wiemy, że $f(0) = 1, f'(0) = 0, f(1) = 2, f'(1) = 0,$ f ma w punkcie $x = 1$ ekstremum lokalne oraz $f'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (0,1)$. Wówczas
A. $f(x)$ może być wypukła na całym przedziale $(0,1)$.
B. $\forall x \in (0,1) :\ f'(x) < 0$.

C. $f(x)$ może być wklęsła na całym przedziale $(0,1)$.
D. żadne z powyższych.

53. O pewnej funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wiemy, że jest dwukrotnie rózniczkowalna. Ponadto wiemy, że $f(0)=0, f'(0)=0, f(1)=2, f'(1)=0$, f ma w punkcie $x=1$ ekstremum lokalne oraz $f'(x)\neq 0$ dla każdego $x\in(0,1)$. Wówczas
A. może istnieć $x_0\in(0,1)$ takie, że $f(x_0)=0$.
B. $f'(x)$ nie ma ekstremum lokalnego w przedziale $(0,1)$.
C. nie jest możliwe, aby $f''(1)>0$.
D. żadne z powyższych.

54. Rozważmy funkcję $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x\in\mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{dla } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}.$$

Wówczas
A. funkcja f jest nieciągła w każdym punkcie $x\in\mathbb{R}$.
B. funkcja f jest ciągła tylko w jednym punkcie i jest w tym punkcie różniczkowalna.
C. odpowiedź B jest błędna, ponieważ funkcja różniczkowalna w punkcie musi być ciągła na pewnym otoczeniu tego punktu.
D. funkcja f jest ciągła w $\mathbb{Q}$.

55. Pierwszą pochodna funkcji $f:x\mapsto x^x$ w punkcie $x=2$ jest równa
A. 4.
B. $4\ln 2$.
C. $4(1+\ln 2)$.
D. funkcja ta nie jest rózniczkowalna w punkcie $x=2$.

56. Pierwsza pochodna funkcji $f:x\mapsto \displaystyle\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$ w punkcie x wynosi
A. $\frac{\sin t}{t}$.
B. $2\frac{\sin x^2}{x}$.
C. $2\frac{\sin x}{x}$.
D. pochodna nie istnieje.

57. Pochodna funkcji $x\mapsto(\sin x)^x$ jest równa
A. $x\mapsto e^{x\sin x}$.

B. $x \mapsto (\sin x)^x \cos x$.
C. $x \mapsto (\sin x)^x \left(\ln \sin x + \frac{x \cos x}{\sin x}\right)$.
D. $x \mapsto (\cos x)^x$.

58. W przestrzeni $C\,[0, 2\pi]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$, norma funkcji $x \mapsto 2\sin x - 3\cos x$ jest równa
A. 1.
B. 13π.
C. $\sqrt{13\pi}$.
D. $\sqrt{10\pi}$.

59. Niech $\int\limits_0^1 \varphi(t)dt = 20$ i $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}$. Wówczas całka podwójna $\iint\limits_D \varphi(x^2 + y^2)dxdy$ jest równa
A. 5π.
B. 10.
C. $\frac{1}{2}\pi^2$.
D. 2π.

60. Niech $G = \{(x, y) :\ |x| + |y| \leq 1\}$ oraz niech $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Po zastosowaniu zamiany zmiennych na $u = x+y$, $v = x - y$ w całce $\iint\limits_G f(x + y)g(x - y)dxdy$ otrzymamy
A. $\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(u)g(v)\,dudv$.
B. $4\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(u)g(v)\,dudv$.
C. $\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(u)g(v)\,dudv$.
D. $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u)g(v)\,dudv$.

61. Całka krzywoliniowa $\int_K 2xyzdl$, gdzie $K : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, jest równa

A. $\frac{\sqrt{5}}{12}(\pi + 6 + 3\sqrt{3})$.
B. $\frac{\sqrt{5}}{12}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$.
C. $(\sqrt{5}\pi - 3\sqrt{3})$.
D. $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi\sqrt{3})$.

62. Całka krzywoliniowa $\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ po gładkiej krzywej zamkniętej ograniczającej obszar S, zorientowanej dodatnio względem S i takiej, że $(0,0) \in S$ jest równa
A. 2π.
B. 2.
C. -2π.
D. -2.

63. Jeśli $z = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{20}$, to
A. $z = -512$.
B. $z = 512 - 512\sqrt{3}i$.
C. $z = 512\sqrt{3} - 512i$.
D. $z = 32 - 32i$.

64. Liczba $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu
A. $W(z) = z^{24} - 1$.
B. $W(z) = z^{24} + 1$.
C. $W(z) = z^{24} - i$.
D. $W(z) = z^{24} + i$.

65. Odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ określone następująco $L(x,y) = (x+y, 2y, 2x+2y)$ jest
A. epimorfizmem.
B. izomorfizmem.
C. monomorfizmem.
D. formą kwadratową.

66. Niech $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym, którego macierz w bazach kanonicznych ma postać $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Wtedy następujące zdanie jest prawdziwe
A. $\operatorname{Ker} L \neq \{0\}$.
B. $L(1,1,1) = (4,1,2)$.

C. L jest izomorfizmem.
D. $\dim(\mathrm{Im}\, L) = 2$.

67. Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, gdzie $f(x, y, z) = (x + y, 2x + z)$
A. jest iniekcją, ale nie jest suriekcją.
B. jest suriekcją, ale nie jest iniekcją.
C. jest bijekcją.
D. nie jest ani iniekcją, ani suriekcją.

68. Jądrem odwzorowania liniowego

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (x + y - 2z, x - 2y + z, -2x + y + z) \in \mathbb{R}^3$$

A. jest zbiór $\{(0, 0, 0)\}$.
B. jest zbiór $\mathrm{Lin}\{(1, 1, 1)\}$.
C. jest zbiór $\mathrm{Lin}\{(1, 1, 2)\}$.
D. jest zbiór pusty.

69. Jądrem odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ danego wzorem:

$$f(p) : x \to x^2 p'(x) - x^2 p(1)$$

jest zbiór
A. $\{\mathbf{0}\}$.
B. $\{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$.
C. $\{ax : a \in \mathbb{R}\}$.
D. $\{ax + 2a : a \in \mathbb{R}\}$.

70. Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ spełnia następujące zależności

$$f(1, 1, 1, 1) = (2, 0), \quad f(1, 1, 1, 0) = (2, 1),$$

$$\mathrm{Ker}\ f = \{a(1, -1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 1,) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Odwzorowanie f określone jest wzorem
A. $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x - y - z)$.
B. $f(x, y, z, t) = (x - y, z + t)$.
C. $f(x, y, z, t) = (x + y, z - t, 2x - t, z - 3x)$.
D. $f(x, y, z, t) = (x + y, z - t)$.

71. Niech $T : C^{(1)}[a,b] \to C[a,b]$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $T(f) = f' - f$. Wówczas jądro Ker T tego odzworowania ma postać
A. Ker $T = \{\emptyset\}$.
B. Ker $T = \{x \mapsto Ce^x \ : \ C \in \mathbb{R}\}$.
C. Ker $T = \{x \mapsto Cx \ : \ C \in \mathbb{R}\}$.
D. Ker $T = \emptyset$.

72. Wymiar jądra odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}_2[x] \mapsto \mathbb{R}^3$, gdzie

$$f(w) = (w''(0), w'(0), w'(1))$$

dla $w \in \mathbb{R}_2[x]$, jest równy
A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

73. Wymiar obrazu odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, gdzie

$$f(w) : x \mapsto w(x+1) + xw'(1)$$

dla $w \in \mathbb{R}[x]_2$, jest równy
A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

74. Możliwe wartości wyznacznika kwadratowej macierzy rzeczywistej spełniającej równanie $\left(A^T\right)^3 - A^{-1} = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{0}$ jest macierzą zerową, to
A. 1.
B. 0.
C. 1 lub -1.
D. -1.

75. Jeżeli rzeczywista macierz kwadratowa A jest macierzą ortogonalną, to
A. det $A = 0$.
B. wyznacznik macierzy A nie jest określony.
C. $|\det A| = 1$.
D. det $A \geq 2$.

76. Załóżmy, że macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełniają warunki: $AB - A^{-1} = \mathbf{0}$, $B^{-1} + A = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{0}$ jest macierzą zerową wymiaru $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas
A. $\det A = \det B = 2$
B. $\det A = 2, \det B = 0$
C. $\det A = (-2)^n, \det B = 1$
D. $\det A = (-1)^n, \det B = 1$.

77. Niech A będzie dowolną rzeczywistą macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$. Diagonalizowalności macierzy A nie gwarantuje warunek:
A. istnieje macierz (rzeczywista) nieosobliwa P taka, że $P^{-1}AP$ jest macierzą diagonalną.
B. istnieją macierze (rzeczywiste) nieosobliwe P, Q takie, że $Q^{-1}AP$ jest macierzą diagonalną.
C. istnieje n liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy A.
D. macierz A ma n różnych wartości własnych.

78. Kosinus kąta między wektorami własnymi macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ jest równy
A. -1.
B. 0.
C. $-\frac{1}{2}$.
D. 1.

79. Jeśli A jest macierzą kwadratową nieosobliwą taką, że $A^{-1} = A^2$, to
A. $\det A = 2$.
B. $\det A = -1$.
C. $\det A = 1$.
D. $\det A = 0$.

80. Jeśli A jest macierzą kwadratową wówczas
A. $A - A^T$ jest macierzą symetryczną.
B. $A + A^T$ jest macierzą antysymetryczną.
C. $A - A^T$ jest macierzą antysymetryczną.
D. $A + A^T$ jest macierzą diagonalną.

81. Macierz e^A dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ jest równa

A. $\begin{bmatrix} e & e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$.

B. $\begin{bmatrix} e & e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 2e \end{bmatrix}$.

C $\begin{bmatrix} e & e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2/2 \end{bmatrix}$.

D. $\begin{bmatrix} e & e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e/2 \end{bmatrix}$.

82. Postacią Jordana macierzy $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ jest

A. $\begin{bmatrix} 1-\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{17} \end{bmatrix}$.

B. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

C. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{17}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{17}) \end{bmatrix}$.

D. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

83. Podprzestrzenią wektorową przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ wszystkich funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ jest

A. $\{f : \exists x : f(x) = 0\}$.

B. $\{f : \forall x : f(x) \neq 0\}$.

C. $\{f : f(0)f(1) = 0\}$.

D. $\{f : f|_{\mathbb{Z}} \equiv 0\}$.

84. Zbiór $\{w \in \mathbb{R}_4[x] : w(1) = k, w'(1) - w''(1) = l\}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}_4[x]$, gdy

A. $k \in \mathbb{R}$, $l = 0$.

B. $k = 1$, $l = 0$.

C. $k = 1$, $l \in \mathbb{R}$.

D. $k = l = 0$.

85. Wymiar przestrzeni wektorowej
$\{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) + p'(0) = p'(1) + p''(0) = 0\}$ jest równy
A. 3.
B. 4.
C. 0.
D. 1.

86. Współrzędne wektora u w bazie $B = (u_1, u_2, u_3)$ pewnej przestrzeni wektorowej V wynoszą $(3, 2, 1)$. Współrzędne tego wektora w bazie $B' = (u_1 + u_2 + u_3, u_1 + u_2, u_1)$ wynoszą
A. $(1, 1, -1)$.
B. $(1, -1, 1)$.
C. $(-1, 1, 1)$.
D. $(1, 1, 1)$.

87. Zbiór wektorów danej przestrzeni wektorowej nie musi być zbiorem wektorów liniowo zależnych, jeśli
A. istnieje nadzbiór tego zbioru, którego wektory tworzą układ liniowo zależny.
B. wektor zerowy należy do tego zbioru.
C. jakiś wektor z tego zbioru da się wyrazić jako kombinacja liniowa pozostałych.
D. zawiera podzbiór tworzący układ wektorow liniowo zależnych.

88. Niech $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + y - z = 0,\ 3x - 2y + z = 0\}$. Bazę V jako przestrzeni wektorowej stanowią wektory:
A. $(0, 0, 0)$.
B. $(1, 5, 7)$.
C. $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$.
D. $\emptyset$.

89. Niech V będzie przestrzenią wektorową o skończonym wymiarze. Bazą przestrzeni V nie jest (zazwyczaj)
A. maksymalny (względem inkluzji) liniowo niezależny podzbiór zbioru generującego przestrzeń V.
B. najliczniejszy liniowo niezależny podzbiór zbioru generującego przestrzeń V.
C. minimalny (względem inkluzji) zbiór generujący przestrzeń V.
D. maksymalny (względem inkluzji) zbiór generujący przestrzeń V.

90. Punktem symetrycznym do punktu $P = (0,1,3)$ względem prostej $l: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{3}$ jest punkt
A. (1,1,0).
B. (0,-1,7).
C. $(0, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.
D. (-1,-1,0).

91. Zbiór $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x-1}{2} = -y-2 = \frac{z}{3}, x+1 = \frac{y+11}{2} = z+1\right\}$ to
A. zbiór pusty.
B. punkt $(3,-3,3)$.
C. prosta.
D. płaszczyzna.

92. Równaniem prostej przechodzącej przez punkt $A(1,3,-5)$, która jest prostopadła do prostych $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z}{-5}$ oraz $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 9 & - & 5t \\ y & = & 1 & - & t \\ z & = & 4 & + & 10t \end{array}\right.$ jest

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z+5}{-5}$.
B. $5(x-1) - 5(y-3) + 3(z+5) = 0$.
C. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+5}{3}$.
D. $\frac{x-1}{65} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+5}{32}$.

93. Równanie

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$$

przedstawia

A. elipsoidę.
B. hiperboloidę jednopowłokową.
C. paraboloidę.
D. hiperboloidę dwupowłokową.

94. Równanie

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$$

przedstawia

A. stożek.
B. hiperboloidę jednopowłokową.
C. paraboloidę.
D. hiperboloidę dwupowłokową.

95. Równanie

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 0$$

przedstawia

A. stożek.
B. hiperboloidę jednopowłokową.
C. walec hiberboliczny.
D. dwie płaszczyzny.

96. Równanie

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z$$

przedstawia

A. stożek.
B. paraboloidę hiperboliczną.
C. paraboloidę eliptyczną.
D. hiperboloidę dwupowłokową.

97. Równanie

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$$

przedstawia

A. stożek.
B. paraboloidę hiperboliczną.
C. paraboloidę eliptyczną.
D. hiperboloidę dwupowłokową.

98. Równanie we współrzędnych biegunowych

$$\rho = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}$$

przedstawia

A. elipsę.
B. parabolę.
C. hiperbolę.
D. coś innego.

99. Równanie we współrzędnych biegunowych

$$\rho = \frac{6}{1 + \cos\varphi}$$

przedstawia

A. elipsę.
B. parabolę.
C. hiperbolę.
D. coś innego.

100. Równanie we współrzędnych biegunowych

$$\rho = \frac{3}{1 + 2\cos\varphi}$$

przedstawia

A. elipsę .
B. parabolę.
C. hiperbolę.
D. coś innego.

101. Równanie prostej w $\mathbb{R}^3$ zadanej równaniami

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2(x-1) - y = 0 \end{cases}$$

dane jest wzorem

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

C. $x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3}$

D. $\frac{x+1}{-2} = y = \frac{z-1}{3}$

102. Rząd grupy ilorazowej Z_{12} względem podgrupy H rzędu 3 wynosi
A. 4.
B. 6.
C. 3.
D. 2.

103. Jeśli G jest grupą cykliczną, to:
A. G jest grupą abelową.
B. rząd grupy G jest skończony.
C. każdy element grupy G jest generatorem.
D. grupa G ma dokładnie jeden generator.

104. Niech G będzie skończoną grupą cykliczną rzędu n. Fałszywe może być stwierdzenie:
A. G jest abelowa.
B. G jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_n$.
C. G ma generator.
D. Każdy element grupy G ma rząd równy n.

105. Grupami cyklicznymi nie są grupy
A. skończenie generowane.
B. $\mathbb{Z}_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_1$
C. $\mathbb{Z}_p$, gdzie p jest liczbą pierwszą.
D. permutacji.

106. Niech x będzie dzielnikiem zera pierścienia. Wówczas
A. x jest odwracalny.
B. x jest nieodwracalny.
C. x jest jedynką.
D. x jest stowarzyszony z jedynką.

107. Dany jest pierścień $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{7}\right] = \{a + bi\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Wówczas
A. liczba 2 elementem odwracalnym w pierścieniu $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{7}\right]$.
B. liczba 2 elementem pierwszym w pierścieniu $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{7}\right]$.
C. liczba $i\sqrt{7}$ elementem pierwszym w pierścieniu $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{7}\right]$.
D. liczba $i\sqrt{7}$ elementem odwracalnym w pierścieniu $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{7}\right]$.

108. Pierścień wielomianów $K[X]$ nad dowolnym
A. ciałem K jest pierścieniem głównym.
B. pierścieniem K jest pierścieniem głównym.
C. pierścieniem przemiennym K jest pierścieniem Gaussa.
D. ciałem K jest pierścieniem skończonym.

109. Niech $a = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ będzie elementem algebraicznym nad $\mathbb{Z}$. Stopień liczby algebraicznej a wynosi:
A. 2.
B. 4.
C. 3.
D. 5.

110. Każde niezerowe ciało
A. ma dokładnie jeden ideał.
B. ma dokładnie dwa ideały.
C. ma nieskończenie wiele ideałów.
D. nie zawiera żadnych ideałów.

111. Określona w $\mathbb{R}$ relacja R taka, że

$$aRb \iff a^b = 16$$

ma następujące własności relacji równoważności:
A. tylko zwrotność.
B. zwrotność, symetryczność i przechodniość.
C. tylko zwrotność i symetryczność.
D. żadnych.

112. Niech $\mathrm{Int}\,(A)$ oznacza wnętrze zbioru A. Które z poniższych zdań nie zawsze jest prawdziwe:
A. $\mathrm{Int}\,(\mathrm{Int}\,(A)) = \mathrm{Int}\,(A)$.

B. $\mathrm{Int}\,(A \cap B) = \mathrm{Int}\,(A) \cap \mathrm{Int}\,(B)$.
C. $\mathrm{Int}\,(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}\,(A) \cup \mathrm{Int}\,(B)$.
D. $\mathrm{Int}\,(A \cup B) \subseteq \mathrm{Int}\,(A) \cup \mathrm{Int}\,(B)$.

113. Niech $\overline{A}$ oznacza domknięcie zbioru A. Zawsze prawdą jest, że
A. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
B. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
C. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
D. $\overline{A \cap B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

114. Zbiór $\displaystyle\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \left[0, \frac{1}{t+1}\right]$ to
A. przedział [0,1).
B. zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.
C. przedział [0,1].
D. przedział (0,1).

115. Zbiór $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{n}, \sqrt{2n}\right]$ to
A. suma zbiorów $\{0\} \cup [1, +\infty)$.
B. zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.
C. przedział $[1, +\infty)$.
D. przedział $(0, +\infty)$.

116. Zbiorem równolicznym ze zbiorem $\{a+bc \,:\, a \in \mathbb{Q},\, b \in [0, +\infty),\, c \in \mathbb{R}\}$ jest zbiór
A. $\mathbb{Q}$.
B. $\mathbb{R}$.
C. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
D. $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

117. Relacją dobrego porządku w $\mathbb{N}^2$ jest relacja
A. $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$.
B. $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \leq c \vee b \leq d$.
C. $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow d < b \vee (d = b \wedge c \leq a)$.
D. $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow d > b \vee (d = b \wedge c \geq a)$.

118. Twierdzenie Cantora można sformułować następująco:
A. Zbiór podzbiorów zbioru X jest równoliczny ze zbiorem wszystkich

funkcji ze zbioru $\{0,1\}$ do X.
B. Zbiór podzbiorów zbioru X jest równoliczny ze zbiorem wszystkich funkcji ze zbioru X do zbioru $\{0,1\}$.
C. Moc zbioru wszystkich podzbiorów zbioru X jest większa od mocy zbioru X.
D. Nie istnieje iniekcja ze zbioru X do zbioru wszystkich podzbiorów zbioru X.

119. Niech (X,R) i (Y,S) będą przestrzeniami dobrze uporządkowanymi. Na iloczynie $X\times Y$ definiujemy relację:

$$(x,y)\pi(x',y') \Leftrightarrow \ xRx' \ \wedge \ ySy'.$$

Relacja π na zbiorze $X\times Y$
A. jest relacją dobrze porządkującą.
B. jest relacją porządkująca liniowo, ale niekoniecznie dobrze.
C. jest relacją porządkująca częściowo, ale niekoniecznie liniowo.
D. nie jest relacją porządku.

120. Niech odwzorowanie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem: $f(x,y)=(xy,x+y)$. Odwzorowanie f
A. jest suriekcją, nie jest iniekcją.
B. jest iniekcją, nie jest suriekcją.
C. nie jest ani iniekcją, ani suriekcją.
D. jest zarówno suriekcją, jak i iniekcją.

121. Dane są odwzorowania $f:X\to Y$ oraz $g:Y\to Z$. Jeśli złożenie $g\circ f$ jest bijekcją, to
A. f jest suriekcją, g jest iniekcją.
B. f jest iniekcją, g jest suriekcją.
C. oba odwzorowania są różnowartościowe.
D. oba odwzorowania muszą być bijekcjami.

122. Równanie $x''-\frac{4}{t}x'+\frac{6}{t^2}x=2t^2,\ t\in(0,+\infty)$ ma rozwiązanie ogólne postaci
A. $x=t^3+c_1t^2+c_2t^4$.
B. $x=t^4+c_1t^2+c_2t^3$.
C. $x=t^4+c_1t+c_2t^2$.
D. $x=t^2+c_1t+c_2t^2$.

123. Rozważmy równanie $y'' - 2y' + y = x + 1$. Rozwiązanie szczególne tego równania ma postać $y = \mathrm{C}_1(x)\, y_1 + \mathrm{C}_1(x)\, y_2$, gdzie:
A. $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = x\, e^{-x}$, $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1{}'(x) \\ \mathrm{C}_2{}'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x+1 \end{bmatrix}$.
B. $y_1 = e^{x}$, $y_2 = x\, e^{x}$, $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1{}'(x) \\ \mathrm{C}_2{}'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x+1 \end{bmatrix}$.
C. $y_1 = e^{x}$, $y_2 = x\, e^{x}$, $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1(x) \\ \mathrm{C}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x+1 \end{bmatrix}$.
D.$y_1 = e^{x}$, $y_2 = x\, e^{x}$, $\begin{bmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1{}'(x) \\ \mathrm{C}_2{}'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x+1 \end{bmatrix}$.

124. Wielomian $\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - 2)^2\, (\lambda^2 + 16)^2$ jest wielomianem charakterystycznym równania $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 36y^{(4)} - 128y^{(3)} + 384y^{(2)} - 1024y' + 1024y = 0$. Układ fundamentalny rozwiązań tego równania to:
A.$y_1 = xe^{2x}$, $y_2 = x^2 e^{2x}$, $y_3 = x \sin 4x$, $y_4 = x \cos 4x$, $y_5 = x^2 \sin 4x$, $y_6 = x^2 \cos 4x$.
B.$y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$, $y_3 = \sin 4x$, $y_4 = \cos 4x$, $y_5 = x \sin 4x$, $y_6 = x \cos 4x$.
C.$y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$, $y_3 = \sin 4x$, $y_4 = \cos 4x$, $y_5 = x \sin 4x$, $y_6 = x \cos 4x$, $y_7 = -x \sin 4x$, $y_8 = x \cos 4x$.
D.$y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$, $y_3 = \sin 4x$, $y_4 = \cos 4x$, $y_5 = x \sin 4x$, $y_6 = x \cos 4x$.

125. W metodzie przewidywania dla równania różniczkowego $y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x}$ całkę szczególną tego równania przewidujemy w postaci
A. $y = Ae^{3x}$.
B. $y = Axe^{3x}$.
C. $y = Ax^2e^{3x}$.
D. $y = Ax^3e^{3x}$.

126. Równanie różniczkowe $y' = y^{\frac{2}{3}}$ z warunkiem początkowym $y(0) = 0$
A. ma dokładnie jedno rozwiązanie $y = \frac{x^2}{9}$.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie $y = \frac{x^3}{27}$.
C. nie ma rozwiązań.
D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

127. Problem brzegowy

$$\begin{cases} x'' + 4x & = 0 \\ x(0) = x(\frac{\pi}{2}) & = 0 \end{cases}$$

A. nie ma rozwiązania.
B. ma jedno rozwiązanie.

C. ma 2 rozwiązaia.
D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

128. Punkt krytyczny układu

$$\begin{cases} x_1' &= -4x_1 - 5x_2 \\ x_2' &= 5x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

to
A. ognisko.
B. węzeł.
C. środek.
D. siodło.

129. Całka ogólna równania jednorodnego

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

jest postaci
A. $y = -\ln|x| + C$.
B. $y = \ln|\frac{c}{x}|$.
C. $y = -\ln|\ln|\frac{c}{x}||$.
D. $y = -x\ln|\ln|\frac{c}{x}||$.

130. Dla równania $(t-1)x^{''} - tx^{'} + x = 0$ następujące funkcje tworzą układ fundamentalny
A. $x_1(t) = t$, $x_2(t) = e^{2t}$.
B. $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t^2$.
C. $x_1(t) = t$, $x_2(t) = e^t$.
D. $x_1(t) = e^t$, $x_L(t) = e^{-t}$.

131. Czynnikiem całkującym równania różniczkowego $2t(1-e^y)dt + e^y(1+t^2)dy = 0$ jest funkcja
A. $\mu(t,y) = \frac{1}{t}$.
B. $\mu(t,y) = \frac{1}{t^2+1}$.
C.$\mu(t,y) = e^y$.
D. $\mu(t,y) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$.

132. Jaką wartość przyjmie zmienna x po wykonaniu instrukcji (w języku C):

```
int x,y,z;
y=2; z=5;
x=z/2*2%y+z%y;
```

A. 1.
B. 2.
C. 0.
D. 5.

133. Rzucamy dwunastoma kostkami do gry. Prawdopodobieństwo że każda ścianka wypadła dwa razy, jest równe
A. $\frac{12!}{2^{12}}$.
B. $\frac{12!}{2^6 2^{12}}$.
C. $\frac{12!}{(6!)^2}$.
D. $\frac{2}{12!}$.

134. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Bernoulliego (dwumianowym) z parametrami 100 i $\frac{1}{10}$. Niech Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Wtedy
A. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{X_1 + \cdots + X_n - 100n}{3\sqrt{n}} < t\right) = \Phi(t)$.
B. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{X_1 + \cdots + X_n - 100n}{9\sqrt{n}} < t\right) = \Phi(t)$.
C. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{3\sqrt{n}} < t\right) = \Phi(t)$.
D. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{X_1 + \cdots + X_n - 10n}{9\sqrt{n}} < t\right) = \Phi(t)$.

135. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie definiowanym przez dystrybuantę F. Wtedy dystrybuanta G zmiennej losowej $\min\{X, Y\}$ dana jest wzorem
A. $G(x) = (F(x))^2$.
B. $G(x) = 1 - (F(x))^2$.
C. $G(x) = (1 - F(x))^2$.
D. $G(x) = 1 - (1 - F(x))^2$.

136. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie definiowanym przez dystrybuantę F. Wtedy dystrybuanta G

zmiennej losowej $\max\{X, Y\}$ dana jest wzorem
A. $G(x) = (F(x))^2$.
B. $G(x) = 1 - (F(x))^2$.
C. $G(x) = (1 - F(x))^2$.
D. $G(x) = 1 - (1 - F(x))^2$.

137. Dystrybuanta zmiennej losowej postaci $X = \max\{G, 0\}$ gdzie G ma standardowy rozkład normalny
A. jest funkcją ciągłą.
B. jest funkcją ściśle rosnącą.
C. ma skok w punkcie 0 o wielkości $\frac{1}{2}$.
D. nie istnieje.

138. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkład normalny, odchylenie standardowe zmiennej X wynosi 1, a zmiennej Y jest równe 2. Odchylenie standarowe zmiennej losowej $Z = X + 2Y$ jest równe
A. 5.
B. $\sqrt{17}$.
C. 3.
D. $1 + 2\sqrt{2}$.

139. Odchylenie standardowe zmiennej losowej X wynosi 1, a odchylenie standardowe zmiennej losowej Y jest równe $\sqrt{2}$. Kowariancja między zmiennymi losowymi $X + Y$ i $X - Y$ jest równa
A. -1.
B. $1 - \sqrt{2}$.
C. 0.
D. $1 + \sqrt{2}$.

140. Odchylenie standardowe zmiennej losowej X wynosi 1, a odchylenie standardowe zmiennej losowej Y jest równe $\sqrt{2}$. Współczynnik korelacji między zmiennymi losowymi $X + Y$ i $X - Y$ jest równy
A. -1.
B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. 0.
D. $\sqrt{2} - 1$.

141. X jest dowolną zmienną losową. Prawdziwe jest stwierdzenie:
A. $\mathrm{E}(X^2) \geq \mathrm{E}^2(X)$.

B. $\mathrm{E}(X^2) \leq \mathrm{E}^2(X)$.
C. Każda z liczb $\mathrm{E}(X^2)$ i $\mathrm{E}^2(X)$ może być większa od drugiej.
D. $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}^2(X)$.

142. Dla każdego ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji mierzalnych, gdzie $f_n : A \to [0; +\infty], (n = 1, 2, \dots)$, zachodzi nierówność
A. $\displaystyle\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$.
B. $\displaystyle\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$.
C. $\displaystyle\int_A \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$.
D. $\displaystyle\int_A \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$.

143. Zmienne losowe X, Y, Z są parami niezależne. Zakładając istnienie wszystkich niżej wymienionych momentów, mamy:
A. $\mathrm{Cov}(X + Y, Y + Z) = \mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z)$.
B. $\mathrm{Cov}(X + Y, Y + Z) = \mathrm{Var}(X + 2Y + Z)$.
C. $\mathrm{Cov}(X + Y, Y + Z) = \mathrm{Var}(Y)$.
D. $\mathrm{Cov}(X + Y, Y + Z) = E(X) + \mathrm{Var}(Y) + E(Z)$.

144. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$. $\mathrm{Cov}(X, X^2)$ jest równa
A. $\frac{1}{24}$.
B. $\frac{1}{12}$.
C. $\frac{1}{6}$.
D. $\frac{1}{3}$

145. $X_1, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym $U(0, 1)$. Wariancja zmiennej losowej $\max\{X_1, \dots, X_n\}$ jest równa
A. $\frac{1}{n(n+2)}$.
B. $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
C. $\frac{1}{6n}$.
D. $\frac{1}{2n^2}$.

146. X oraz Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach jednostajnych na przedziale $(0, 1)$, a Z jest zdefiniowana jako $|X - Y|$. Wartość

$\mathrm{E}(Z)$ jest równa
A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{2}{3}$.
C. $\frac{1}{2}$.
D. $\frac{1}{4}$.

147. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład jednostajny na kole jednostkowym o środku $(0,0)$. O współczynniku korelacji i niezależności tych zmiennych możemy stwierdzić, że
A. $\rho(X,Y)=0$, ale zmienne są zależne.
B. $\rho(X,Y)=0$, więc zmienne są niezależne.
C. $\rho(X,Y)\neq 0$, więc zmienne są zależne.
D. $\rho(X,Y)\neq 0$, ale zmienne są niezależne.

148. Ilość n-cyfrowych liczb naturalnych, w których cyfry wystepują w porządku niemalejącym jest równa
A. 2.
B. $\binom{n+8}{8}$.
C. $\binom{n}{9}$.
D. $\binom{n}{n-1}$.

149. Danych jest n różnych zadań, z których każde jest realizowane przez dwie osoby. Na ile sposobów można przydzielić $2n$ osób do realizacji tych zadań?
A. $\frac{(2n)!}{2^n}$.
B. $n!$.
C. $\frac{(2n)!}{2!}$.
D. $(n!)^2$.

150. Na ile sposobów można połączyć w pary $2n$ osób, jeżeli każda para realizuje to samo zadanie?
A. $\frac{(2n)!}{n!}$.
B. $\frac{(2n)!}{2^n}$.
C. $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.
D. $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

151. Wykonujemy 10 kolejnych, niezależnych rzutów symetryczną monetą. Niech S_n oznacza liczbę orłów otrzymaną w początkowych n rzutach. Prawdopodobieństwo warunkowe $\mathrm{P}(S_5=3|S_{10}=7)$ jest równe

A. $\frac{3}{7}$.
B. $\frac{5}{12}$.
C. $\binom{5}{3}\frac{1}{2^5}$.
D. $\frac{21}{50}$.