

## Lista zagadnień z matematyki do egzaminu wstępnego na studia doktoranckie

1. Domkniętość widma operatora ciągłego w przestrzeni Banacha.
2. Zasada jednostajnej ograniczoności (szkic uzasadnienia).
3. Rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji całkowalnej z kwadratem (i charakter jego zbieżności).
4. Zbieżność w normie operatorowej a silna zbieżność ciągu operatorów.
5. Zależność między operatorami symetrycznymi i samosprężonymi.
6. Własności widma operatorów zwartych.
7. Przykład miary spektralnej, twierdzenie spektralne.
8. Przykłady zastosowań twierdzenia Hahna-Banacha.
9. Definicja przestrzeni mierzalnej,  $\sigma$ -algebra Borela.
10. Uzasadnienie, że każde odwzorowanie ciągłe jest mierzalne względem  $\sigma$ -algebr zbiorów borelowskich.
11. Dowód że każda funkcja mierzalna jest granicą pewnego ciągu funkcji prostych i mierzalnych.
12. Definicja miary. Własności ciągłości miar.
13. Konstrukcja miary Lebesgue'a (w  $\mathbb{R}^n$ ).
14. Definicja całki Lebesgue'a z funkcji ograniczonej.
15. Twierdzenie Lebesgue'a o zmajorzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.
16. Różniczkowanie w dziedzinie zespolonej. Równania Cauchy'ego-Riemanna.
17. Twierdzenie całkowite Cauchy'ego.
18. Rozwijalność funkcji analitycznej w szereg potęgowy.
19. Rozwijalność funkcji w szereg Laurenta.
20. Twierdzenie o jednoznaczności funkcji analitycznej.
21. Definicja przestrzeni topologicznej. Przykłady.
22. Definicje funkcji ciągłych w przestrzeniach topologicznych. Homeomorfizmy.
23. Iloczyn kartezjański przestrzeni topologicznych. Topologia Tichonowa.
24. Definicja ciągu uogólnionego. Zbieżność w przestrzeni topologicznej.
25. Zwartość obrazu zbioru zwartego przez przekształcenie ciągłe (uzasadnienie).